

塑性学

1. 非線形弾性体とひずみ硬化塑性体

非線形弾性体とひずみ硬化塑性体の応力-ひずみ関係を比較して、図1に示す。負荷の際に両者は本質的に区別できない。除荷の際に両者の区別が可能となる。非線形弾性体では、除荷径路は負荷径路に一致し、応力が零でひずみが零となる(原点に戻る)。ひずみ硬化塑性体では、除荷径路は初期線形弾性線に平行で、除荷弾性を示し、応力が零でひずみが残留する。これを残留ひずみ、永久ひずみ、塑性ひずみという。

一般に、塑性体の応力 σ はひずみ ε の一価関数ではない。

$$\sigma \neq f(\varepsilon) \quad (1)$$

実際の塑性問題の解析に際しては、全ひずみ理論とひずみ増分理論が用いられる。

全ひずみ理論：

$$\sigma = f(\varepsilon_p) \quad (2)$$

ひずみ増分理論：

$$\sigma = f(\int \Delta \varepsilon_p) \quad (3)$$

ここで、 ε_p は塑性ひずみ、 $\Delta \varepsilon_p$ は塑性ひずみ増分である。厳密には、ひずみ増分理論が正しい。しかし、全ひずみ理論は矛盾があるけれども簡便なので、しばしば用いられる。

上述したように、負荷のみを対象とする限り、ひずみ硬化塑性体は非線形弾性体とみなせる。したがって、ひずみ硬化塑性体に全ひずみ理論が適用できる。以下では、非線形弾性体としての解析を示すが、それは全ひずみ理論に従うひずみ硬化塑性体の解析にほかならない。

2. 真ひずみと破断延性

[例題1] 破断時の真ひずみ ε_r を破断延性(fracture ductility)あるいは破断ひずみ(fracture strain)という。 ε_r を試験片の最初の断面積 A_0 と破断後の断面積 A_r を用いて定義せよ。

(解答) くびれが生じない場合に、真ひずみは次式で定義される。

$$\varepsilon \equiv \int_{l_0}^l d\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \log_e \frac{l}{l_0} \quad (4)$$

ここで l_0 、 l は変形前後の試験片長さである。塑性変形は体積不変であるから、次式が成立する。

$$A_0 l_0 = A l \quad (5)$$

ここで、 A_0 、 A は変形前後の試験片断面積である。したがって、破断後の長さを l_f 、断面積を A_f とすれば、破断延性は次式となる。

$$\epsilon_f = \log_e \frac{l_f}{l_0} = \log_e \frac{A_0}{A_f} \quad (6)$$

3. 真応力と延性材料の塑性不安定

金属材料の丸棒試験片の引張試験における公称応力-公称ひずみ関係の一例を図2に示す。公称応力は(荷重/最初の断面積)、公称ひずみは(伸び/最初の標点距離)で定義される。曲線aは合金鋼や高強度非鉄合金、曲線bは低・中炭素鋼、曲線cは低強度非鉄合金、曲線dは純金属である。また、曲線a~dはそれぞれ引張破壊、カップコーン破壊、せん断破壊、点状破壊に対応しており、脆性、延性の程度が公称応力-公称ひずみ関係に反映されている。

延性材料(ductile materials)の場合、降伏応力(降伏点または耐力) σ_Y が設計における基準強度になる。 σ_Y を超えて負荷すると、材料は塑性変形に伴いひずみ硬化し、変形抵抗が増大する。破壊までの公称応力の最大値を引張強さ(tensile strength) σ_B という。脆性材料(brittle materials)の場合、 σ_B が設計における基準強度となる。

塑性変形が生じた場合、公称応力、公称ひずみの代わりに真応力、真ひずみを考慮する必要がある。真応力 σ は次式で定義される。

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (7)$$

ここで、 F は荷重、 A は変形後の断面積である。塑性変形は体積不変であるから次式が成立する。

$$A_0 l_0 = A l = A l_0 (1 + \epsilon_n) \quad (8)$$

ここで、 A_0 は変形前の断面積、 l_0 、 l は変形前後の長さ、 ϵ_n は公称ひずみである。したがって、真応力 σ と公称応力 σ_n の関係は次式となる。

$$\sigma = (1 + \epsilon_n) \sigma_n \quad (9)$$

図3に示すように、荷重(公称応力)が最大値(引張強さ)を示した後に低下する現象は、ひずみ硬化による荷重の増大($A d\sigma$, 正)と断面積の減少による荷重の低下(σdA , 負)の平衡が成立しなくなるために生じる。これを塑性不安定(plastic instability)という。荷重が最大値を示す点で、次式が成立する。

$$dF = d(\sigma A) = A d\sigma + \sigma dA = 0$$

また、体積不変であるから、 V を体積として次式が成立する。

$$dV = d(Al) = l dA + A dl = 0$$

上式と式(8)を組合せれば、次式が得られる。

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = - \frac{dA}{A} = \frac{dl}{l} = d\varepsilon = \frac{d\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$$

すなわち、荷重が最大値を示す点で、次式が成立する。

$$\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (10)$$

$$\frac{\sigma}{1+\varepsilon_n} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_n} \quad (11)$$

図3を参照して、式(11)は点(-1,0)から $\sigma-\varepsilon_n$ 曲線へ引いた接線の接点において、荷重が最大値を示すことを意味している。この場合の公称応力 $\sigma_B = F_{max}/A_0$ が引張強さである。

一方、ひずみ硬化塑性体(strain hardening plastic material)の真応力 σ -真ひずみ ε 曲線を次式で近似する。

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} \right)^n \quad (12)$$

ここで、 σ_Y は降伏応力、 $\varepsilon_Y = \sigma_Y/E$ は降伏ひずみ、 α, n は材料定数であり、 n をひずみ硬化指数(strain hardening exponent)という。式(12)を式(10)に代入すれば、荷重が最大値を示す点で次式が成立する。

$$\varepsilon = n \quad (13)$$

以上のように、延性材料の塑性不安定(引張強さ)は応力-ひずみ曲線の形、特にひずみ硬化指数によって定まる特性であり、破壊の特性ではない。したがって、破壊以前にこの現象が生じる場合は、破壊力学の対象外となる。破壊力学ではこの現象との境界が常に問題となる。

圧縮試験においても真応力-真ひずみ関係は、引張試験のそれと同様である。しかし、破壊の形態はかなり異なる。延性材料は破壊せず、脆性材料はせん断破壊する。

試験片の断面内で応力勾配がある場合には、最大応力が降伏応力に達した後、順次降伏が進行し、全断面降伏(general yield)に至る。したがって、曲げなどの場合には見掛け上の変形強度、破壊強度が上昇する。

〔例題2〕 引張試験における塑性不安定の現象は塑性崩壊(plastic collapse)ともいう。引張り以外の曲げや振りの場合にも、塑性崩壊が生じる。特に、弾完全塑性体(elastic-perfectly plastic material)を対象として、塑性崩壊荷重(plastic collapse load)を限界荷重(limit load)という。設計では、

負荷される力やモーメントに平衡して発生する1次応力を、塑性崩壊限度に制限する。通常、1次応力は引張応力（圧力容器の場合、膜応力という）と曲げ応力である。

(1) 幅**b**、高さ**h**の矩形断面梁に引張荷重**F**と曲げモーメント**M**を負荷する。材料は降伏応力 σ_Y の弾完全塑性体である。引張荷重**F**のみの場合の塑性崩壊荷重は、次式で与えられる。

$$F_Y = \sigma_Y b h$$

曲げモーメント**M**のみの場合の塑性崩壊モーメントは、次式で与えられる。

$$M_P = \frac{\sigma_Y b h^2}{4}$$

引張荷重**F**と曲げモーメント**M**による塑性崩壊の場合、次式の関係が成立することを導け。

$$\left(\frac{F}{F_Y} \right)^2 + \frac{M}{M_P} = 1 \quad (14)$$

(2) 塑性崩壊の場合に、見掛け上弾性と仮定した引張応力 $P_m = F/bh$ を膜応力強さ、最大曲げ応力 $P_b = 6M/bh^2$ を曲げ応力強さという。 P_m と P_b の間に次式の関係が成立することを導け。

$$\frac{P_b}{\sigma_Y} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{P_m}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \quad (15)$$

(解答)

(1) 図4を参照して、全断面降伏の場合、塑性ヒンジが形成されるが、中立軸の位置を梁の下端から**a**とする ($a < h/2$, 曲げのみの場合には $a = h/2$)。下端から**a**の位置までは圧縮降伏応力 $-\sigma_Y$ が一様に分布し、上端から($h-a$)の位置までは引張降伏応力 σ_Y が一様に分布している。下端から**a**の位置までの $-\sigma_Y$ と上端から**a**の位置までの σ_Y は、梁の中心線に関して曲げモーメントを形成し、これが外力の曲げモーメント**M**とつり合う。

$$M = \sigma_Y (ab)(h - a)$$

残りの引張降伏応力 σ_Y は下端から**a**と($h-a$)の間に一様に分布しており、これが外力の引張荷重**F**とつり合う。

$$F = \sigma_Y (h - 2a)b$$

したがって、 F_Y 、 M_P を用いて、次式が得られる。

$$\left(\frac{F}{F_Y} \right)^2 = \left(1 - 2 \frac{a}{h} \right)^2 = 1 - 4 \frac{a}{h} + \left(2 \frac{a}{h} \right)^2$$

$$\frac{M}{M_P} = \frac{4a(h-a)}{h^2} = 4\frac{a}{h} - \left(2\frac{a}{h}\right)^2$$

すなわち、式(14)が成立する。

(2) 式(14)に(1)で得られた F , F_Y , M , M_P を代入する。

$$\left(\frac{P_m}{\sigma_Y}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{P_b}{\sigma_Y} = 1$$

すなわち、式(15)が成立する。

上式の塑性崩壊限度を図5に曲線ABCで示す。設計では、この塑性崩壊限度(σ_Y 基準)に対して安全率を考慮し(たとえば、基本の許容応力(allowable stress) $S_m = \sigma_Y/1.5$, $P_m \leq S_m$, $P_m + P_b \leq 1.5S_m$)、応力強さの許容限界(許容応力)を図のハッチングした領域とする。1次応力は常に弾性範囲に留まり、かつ塑性崩壊に対して十分な裕度があることがわかる。

なお、ひずみ硬化塑性体に対して、基本の許容応力 S_m は σ_Y 基準あるいは σ_B 基準のいずれか小さい方とする(たとえば、安全率が1.5と3)。

$$S_m = \min\left(\frac{\sigma_Y}{1.5}, \frac{\sigma_B}{3}\right) \quad (16)$$

問題1 1次応力に対して、溶接による拘束応力(constraint stress)や残留応力(residual stress)を2次応力という。図6に示すような平板の中央部を長手方向に溶接して、すべての横断面において破線で示すような長手方向の残留応力が生じている。溶接部において、残留応力は引張り(+)で400(MPa)と測定された。この平板について次の問に答えよ。ただし、材料は弾完全塑性体で、降伏応力は500(MPa)とし、溶接による影響は受けないものとする。

(a) 塑性崩壊荷重 F_Y を求めよ。

(b) 荷重が $F_Y/2$ で負荷を止め、除荷をして荷重が0になった場合の残留応力の分布と大きさを図示せよ。

4. 多軸応力の影響と塑性拘束

等3軸圧縮応力(静水圧)のもとでは、等方・等質材料に塑性変形も破壊も生じない。しかし、等3軸引張応力のもとでは、塑性変形することなく脆性破壊が生じる。等3軸圧縮応力に加えて、1軸方向にのみ引張応力を負荷した場合、材料は延性を示し、破断ひずみは著しく増大する。逆に、等3軸引張応力に加えて1軸方向にのみ引張応力を負荷した場合、材料は脆性を示し、破断ひずみは著しく減少する。

多軸応力(multiaxial stress)の降伏条件(yield criterion)あるいは破壊条件(fracture criterion)と適用の対象を以下に示す。ただし、 σ_1 , σ_2 , σ_3

は主応力 (principle stress, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), σ_f は単軸応力 (uniaxial stress) の場合の降伏応力あるいは破壊応力である。

(a) 最大主応力条件 (maximum principle stress criterion): 脆性破壊

$$\sigma_1 = \sigma_f \quad (17)$$

(b) 最大せん断応力条件 (Tresca条件, Tresca criterion): 延性破壊

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_f \quad (18)$$

(c) せん断ひずみエネルギー条件 (Mises条件, Mises criterion): 延性破壊

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_f^2 \quad (19)$$

これらの降伏条件あるいは破壊条件は, σ_2 あるいは σ_3 を横軸に, σ_1 あるいは σ_3 を縦軸にとった主応力面上の第1象限 (σ_2, σ_1), 第2象限 ($-\sigma_3, \sigma_1$), 第3象限 ($-\sigma_2, -\sigma_3$), 第4象限 ($\sigma_2, -\sigma_3$) に図示できる。また, 多軸応力の場合の降伏応力あるいは破壊応力を実験的に調べ, 結果をモールの応力円として描けば, それらの包絡線が降伏条件あるいは破壊条件を与える。

両側切欠き (notch) 平板あるいは環状切欠き丸棒に単軸引張負荷した場合, 切欠き底断面で塑性変形の結果として生じる断面収縮は上下の塑性変形していない断面の拘束により妨げられる。したがって, 切欠き底断面では多軸応力状態となる。これを塑性拘束 (plastic constraint) という。図7の環状切欠き丸棒試験片の場合を参照して, 軸方向引張荷重の増加に伴い試験片の横断面内で, 半径 r 方向と円周 θ 方向の収縮が生じる。それは弾性変形の範囲では Poisson 効果に基づき, 塑性変形の範囲では体積不変となるように (Poisson 比 $\nu = 1/2$), 断面内での変形が軸方向の変形を補う結果である。塑性変形はまず切欠き底断面で生じる。しかしながら, この部分の収縮は上下の塑性変形していない断面の拘束により妨げられる。したがって, 切欠き底断面では, 軸方向引張応力 σ_z に加えて半径方向引張応力 σ_r と円周方向引張応力 σ_θ が生じる。すなわち, たとえ単軸引張りであっても, 切欠き底断面では3軸引張応力状態になる。このような3軸引張応力状態では, 降伏条件として Tresca 条件あるいは Mises 条件を採用すれば, 全断面降伏した場合の軸方向引張応力 σ_z は平滑試験片 (plain specimen) の単軸引張降伏応力 σ_y よりもはるかに大きくなる。両者の比

$$\lambda = \frac{\sigma_z}{\sigma_y} \quad (20)$$

を塑性拘束係数 (plastic constraint factor) という。その結果, 降伏応力あるいは破壊応力もほぼ λ 倍に増大し, また脆性破壊が生じやすくなる。ここで, $1 \leq \lambda \leq 3$ である。

ただし, 切欠き底表面に垂直な応力 σ_r が表面において0であり, 切欠き底断面の中央において最大値をとることから容易に理解されるように, σ_z も断面で

一様ではなく、表面において最小値、中央において最大値を示す分布となる。したがって、 σ_z を切欠き底断面での平均値として表示し、式(20)の λ を平均塑性拘束係数として定義する。2次元的な板状試験片の場合にも、板厚の中央断面において以上のことは同様だと考えられる。剛塑性体を仮定した平面ひずみすべり線場(plane-strain slip-line field)の解析結果を参照すれば、2次元の深い両側切欠き平板を引張負荷した場合、切欠き底断面で全断面降伏が生じる際の平均塑性拘束係数 λ_m は次式で与えられる。

$$\lambda_m = \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \leq 2.57 & \text{(Tresca条件)} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \leq 2.96 & \text{(Mises条件)} \end{cases} \quad (21)$$

すなわち、 λ_m の最大値は3であり、切欠きの曲率半径 ρ に無関係で、開き角 θ だけに依存する。また、実際には切欠き深さの影響が存在し、切欠き深さの減少に伴い λ_m は低下する。

〔例題3〕 切欠き試験片の場合、全断面降伏を生じる以前に切欠き底で局所的な塑性変形により塑性域(plastic zone)が生じる。切欠き底の塑性域を調べよ。

(解答) 切欠き底での2次元弾性応力分布を示した図8(a)を参照して、切欠き底では表面に垂直な応力 σ_x は存在しないから、平面応力を仮定すれば σ_y のみの単軸応力状態、平面ひずみを仮定すれば σ_y と σ_z の2軸応力状態である。 σ_y は切欠き底からの距離 x の増加に伴い単調に減少し、 σ_x は x の増加に伴いいったん0から増大した後、減少して再び0となる。したがって、切欠き底からある距離だけ内部へ入った箇所において、最も強い2軸応力状態(平面応力)あるいは3軸応力状態(平面ひずみ)が達成される。切欠き底で塑性変形が生じた場合には、すべり線場の解析結果により塑性域の内部($x \leq \omega$)における σ_y 、 σ_x はそれぞれ

$$\sigma_y = \left\{ 1 + \log_e \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \right\} \sigma_Y \quad (22)$$

$$\sigma_x = \sigma_y - \sigma_Y$$

で与えられ、 x の増加に伴い増大する。これを図8(b)に示す。 σ_y 、 σ_x が最も大きくなる弾塑性境界(elastic-plastic boundary)において、2軸応力状態(平面応力)あるいは3軸応力状態(平面ひずみ)が達成される。

問題2 厚肉圧力容器の設計では、Tresca条件に基づく主応力差の最大値を応力強さ(stress intensity) S と定義し、設計応力に用いる。

$$S \equiv \max (| \sigma_1 - \sigma_2 | , | \sigma_2 - \sigma_3 | , | \sigma_3 - \sigma_1 |) \quad (23)$$

降伏開始圧に対して、Tresca条件とMises条件を用いた場合の差異を調べ、上記の妥当性を検証せよ。

5. ひずみ速度の影響

物体が衝突する場合のように、負荷速度(loading rate)あるいはひずみ速度(strain rate)が高い荷重を衝撃荷重(impact load)、動的荷重(dynamic load)という。衝撃荷重による衝撃破壊(impact fracture)、動的破壊(dynamic fracture)や衝撃強度(impact strength)、動的強度(dynamic strength)は、上述した静的荷重による破壊や強度と異なる。

多くの材料では、ひずみ速度の増加に伴い降伏応力や引張強さは増大する。室温における鋼の降伏応力を例にとれば、ひずみ速度が $10^{-1}(/s)$ 以上で、ひずみ速度依存性が著しくなる。なお、温度の低下に伴い鋼の降伏応力は増大する。したがって、鋼の降伏応力に及ぼすひずみ速度と温度の影響は等価とみなされる。真応力 σ -真ひずみ ε 関係に及ぼすひずみ速度 $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon / dt$ の影響もほぼ同様で、次式の表示が用いられる。

$$\sigma = C \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \quad (23)$$

ここで、 C , n , m は材料定数である。鋼の場合、 $m=0.05 \sim 0.25$ で、 m は温度の低下に伴い減少する。

6. 主応力と応力テンソルの不変量

応力の6成分 σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

主応力 σ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

σ の方向余弦 (x, y, z 軸への)

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \\ & \cos \beta \end{aligned}$$

$$\cos \gamma$$

$\triangle ABC \equiv A$

x軸方向の力のつり合い

$$\sigma A \cos \alpha = \sigma_x A \cos \alpha + \tau_{xy} A \cos \beta + \tau_{xz} A \cos \gamma$$

x, y, z軸方向の力のつり合い

$$\sigma \cos \alpha = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma$$

$$\sigma \cos \beta = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma$$

$$\sigma \cos \gamma = \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$$

書き直して

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma = 0$$

方向余弦については

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

行列式を用いて方向余弦を消去 (特性方程式)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

行列式を展開

$$\begin{aligned} & -\sigma^3 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x \\ & - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma + (\sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 \\ & - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}) \\ & = -\sigma^3 + J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma + J_3 \\ & = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ が主応力ならば

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

主応力はある点の応力状態という物理量を代表するもので、座標系の選び方によらない。したがって、 J_1 、 J_2 、 J_3 は座標変換に関係しない量で、応力テンソルの不変量(invariant)という。

平面応力の条件

主応力の1つが0 → 平面応力

$J_3=0$ がこの条件

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$= \tau_{zx} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \sigma_y & \tau_{yz} \end{vmatrix} - \tau_{yz} \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yz} \end{vmatrix} + \sigma_z \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

① $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ (1垂直応力, 2せん断応力が0)

② $\sigma_z = \sigma_y = \tau_{yz} = 0$ (2垂直応力, 1せん断応力が0)

7. 八面体応力と降伏条件

主応力 σ_1 (x軸), σ_2 (y軸), σ_3 (z軸)の場合, 正八面体の一面(ミラー指数(111))を考える

法線0nはx, y, z軸にそれぞれ角度 α をなす

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

垂直応力

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{3} J_1 \quad (\text{応力の静水圧成分}) \end{aligned}$$

せん断応力

垂直応力とせん断応力の合応力を p とする

$$\begin{aligned}
 \tau_{oct}^2 &= p^2 - \sigma_{oct}^2 \\
 &= (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \sigma_{oct}^2 \\
 &= \{(\sigma_1 \cos^2 \alpha)^2 + (\sigma_2 \cos^2 \alpha)^2 + (\sigma_3 \cos^2 \alpha)^2\} - \sigma_{oct}^2 \\
 &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\
 &= \frac{1}{9} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \\
 \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}^{1/2}
 \end{aligned}$$

八面体せん断応力が一定値（材料定数）に達すれば降伏と仮定

$$\begin{aligned}
 \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}^{1/2} \\
 &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

ミーゼスの降伏条件（せん断ひずみエネルギー条件）

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \text{const.}$$

一軸引張り

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_Y, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \\
 2\sigma_Y^2 &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

純粋せん断

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \\
 &= \text{const.} \\
 \tau_{xy} &= \tau_Y, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\
 6\tau_Y^2 &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

一定値（材料定数の決定）

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= 2\sigma_Y^2 = 6\tau_Y^2 \\
 \tau_Y &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_Y \\
 2\tau_Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_Y = 1.155 \sigma_Y
 \end{aligned}$$

相当応力

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}^{1/2}$$

平面応力のミーゼスの降伏条件

$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{or } \sigma_2 = 0)$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3\tau_Y^2 = \sigma_Y^2$$

トレスカの降伏条件 (最大せん断応力条件)

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \sigma_2: \text{中間主応力 (降伏に関与しない)}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \text{const.}$$

一軸引張り

$$\sigma_1 = \sigma_Y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_Y = \text{const.}$$

純粋せん断

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau + \tau = 2\tau = 2\tau_Y = \text{const.}$$

一定値 (材料定数) の決定

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_Y = 2\tau_Y$$

ミーゼスとトレスカの相違

$$2\tau_Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_Y = 1.155 \sigma_Y \quad (\text{ミーゼス})$$

$$2\tau_Y = \sigma_Y \quad (\text{トレスカ})$$

相当せん断応力

$$\bar{\tau} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

相当応力

$$\bar{\sigma} = 2\bar{\tau}$$

等方応力と偏差応力

八面体垂直応力, 平均垂直応力, 静水圧応力, 等方応力

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$= \frac{1}{3} J_1$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

偏差応力 等方応力

降伏曲面

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を3軸にとる

OR: 等方応力の応力ベクトル, 長さ $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$, 方向余弦 $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

OP: 偏差応力の応力ベクトルで, ベクトルORと直交する平面 $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$ 上にある

OQ: 実際の応力ベクトル

降伏は等方応力に無関係、偏差応力で決まる

半径OPの円柱上で降伏が生じる → 降伏曲面

ORと直交する平面上に投影 → 降伏曲線

8. 相当応力と相当ひずみ

ミーゼス

相当応力

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}^{1/2}$$

相当塑性ひずみ増分 (定義)

$$d\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ (d\epsilon_1^p)^2 + (d\epsilon_2^p)^2 + (d\epsilon_3^p)^2 \}^{1/2}$$

cf. 一軸引張り

$$d\epsilon_1^p = d\epsilon^p, \quad d\epsilon_2^p = d\epsilon_3^p = -d\epsilon^p / 2 \quad (\because \nu = 1/2)$$

$$\therefore d\bar{\epsilon}_p = d\epsilon^p$$

一軸引張りの $\sigma - d\epsilon^p$ 関係 (ひずみ増分理論)

$$\sigma = H(\int d\epsilon^p)$$

多軸の場合

$$\bar{\sigma} = H(\int d\bar{\epsilon}_p)$$

全ひずみ理論

$$\sigma = H'(\epsilon)$$

トレスカ

相当応力

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

相当せん断ひずみ増分

$$d\gamma_p = 2 |d\varepsilon_{p_{max}}|$$

cf. 純粋せん断

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma$$

振りの $\tau - d\gamma_p$ 関係

$$\tau = K (\int d\gamma_p)$$

多軸の場合

$$\bar{\tau} = K (\int \bar{d\gamma}_p)$$

構成方程式

剛完全塑性体

弾性なし, $\sigma = \sigma_Y$ (降伏, 塑性変形)

弾完全塑性体

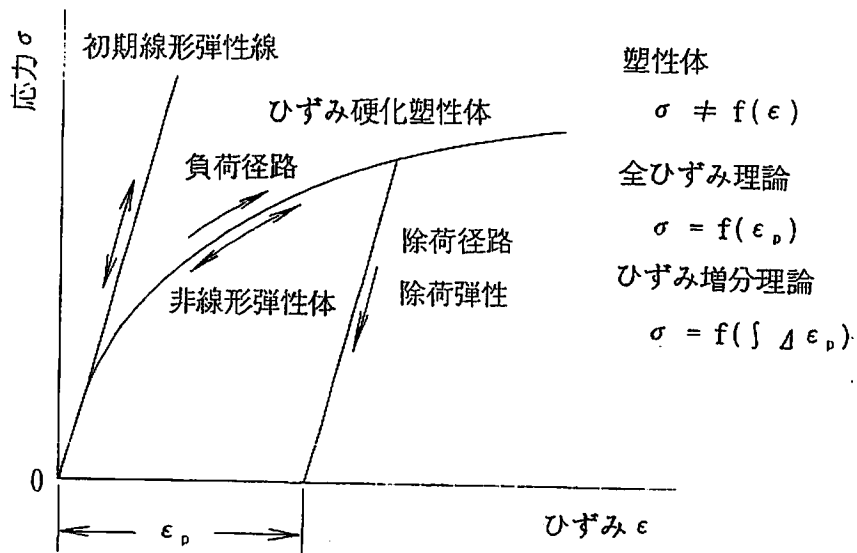
$\sigma = E\varepsilon$ (弾性), $\sigma = \sigma_Y$ (降伏, 塑性変形)

2直線近似 (ひずみ硬化塑性体)

$\sigma = E\varepsilon$ (弾性), $\sigma = \sigma_Y$ (降伏), $(\sigma - \sigma_Y) = \alpha(\varepsilon - \varepsilon_Y)$ (塑性変形)

べき乗硬化則 (ひずみ硬化塑性体)

$\sigma = E\varepsilon$ (弾性), $\sigma = \sigma_Y$ (降伏), $(\frac{\sigma}{\sigma_Y}) = \alpha (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y})^n$ (塑性変形)



残留ひずみ 永久ひずみ 塑性ひずみ

図1 非線形弾性体とひずみ硬化塑性体の応力-ひずみ関係

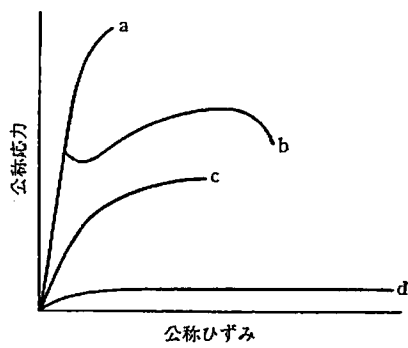


図2 公称応力-公称ひずみ関係

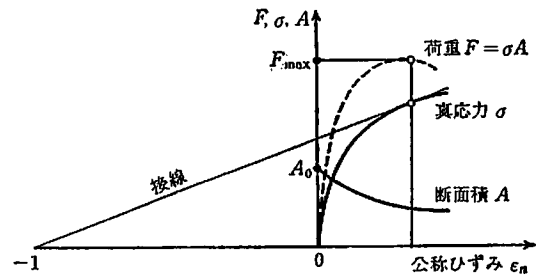


図3 延性破壊における塑性不安定

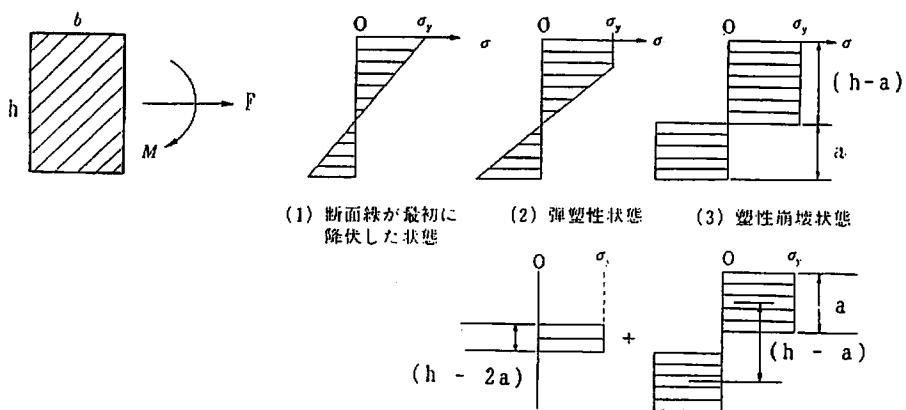


図4 軸力と曲げを受ける矩形断面はりの応力分布

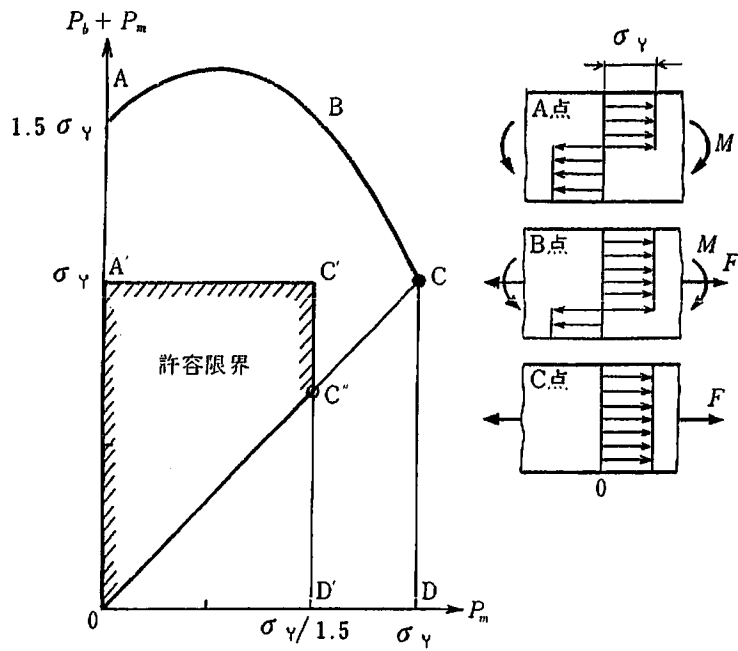


図5 塑性崩壊と許容限界

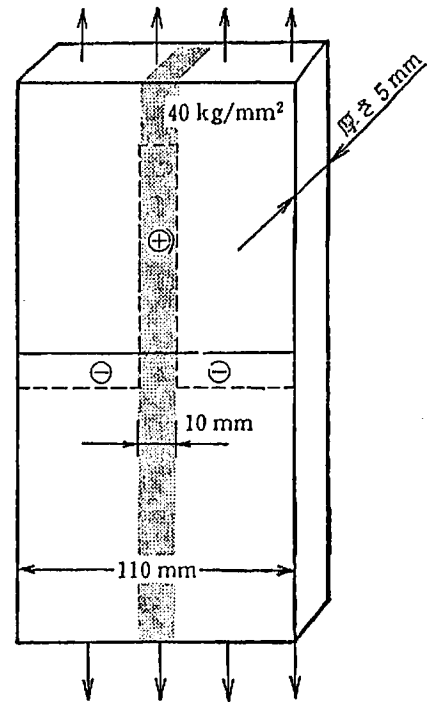


図6 溶接した平板の残留応力分布

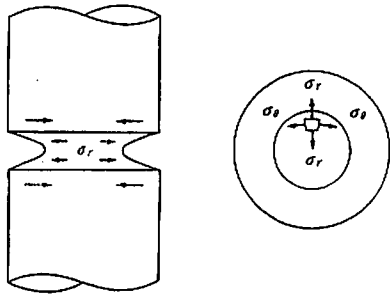


図7 環状切欠き丸棒試験片における塑性拘束

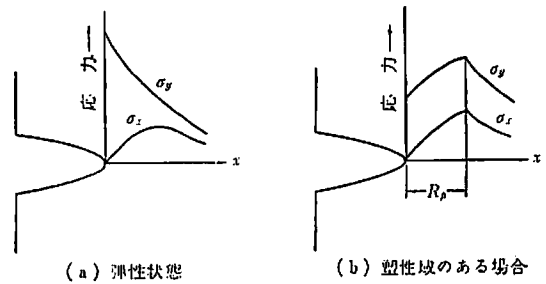


図8 切欠き底での応力分布

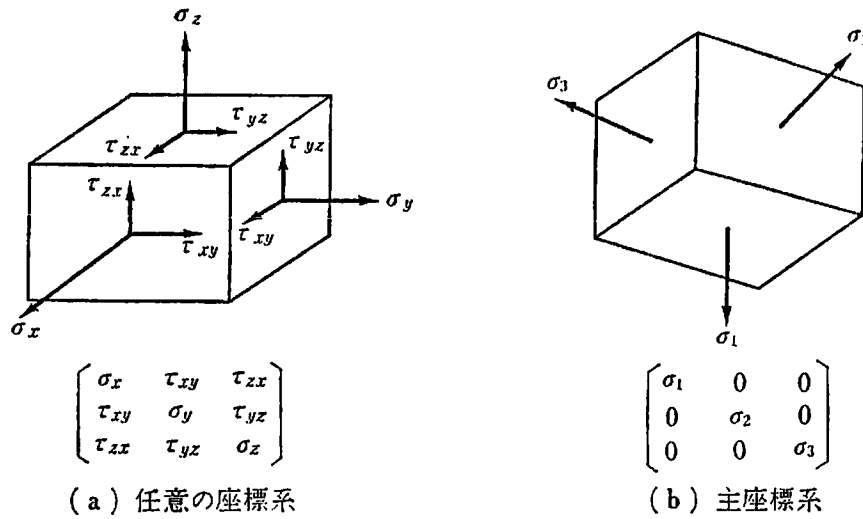


図 座標変換と応力成分

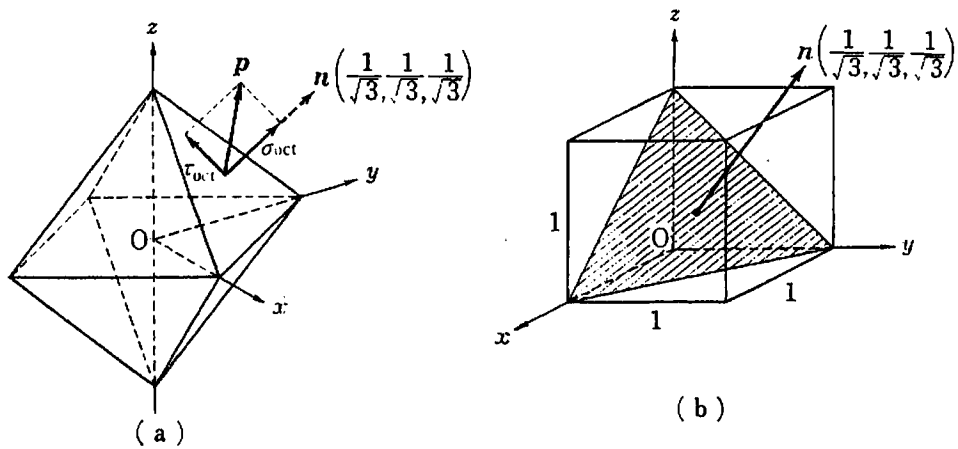


図 八面体応力と八面体せん断応力

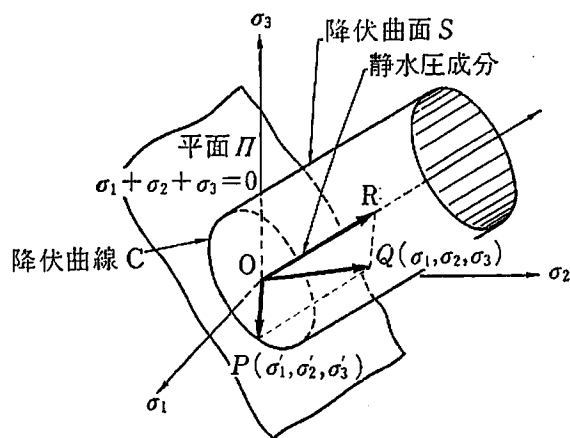


図 降伏条件の幾何学的表示

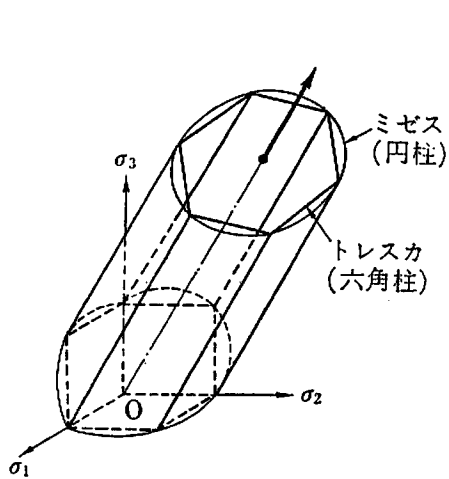


図 降伏曲面

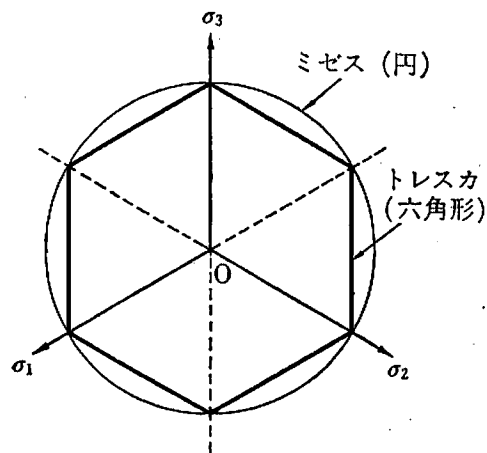


図 降伏曲線

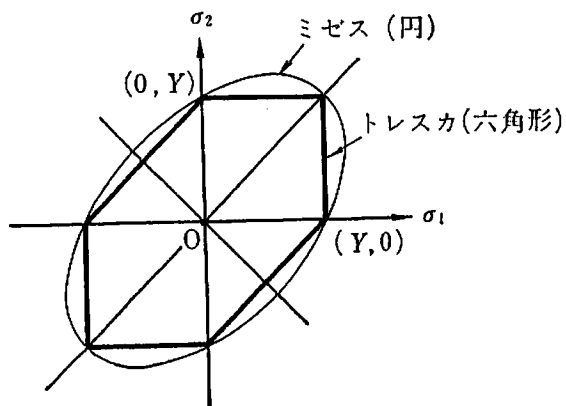


図 平面応力状態における降伏曲線