応力集中（円孔をもつ無限板の引張り）

サンブナンの原理（図１参照）

$r = b \quad (b \gg a)$

$$\sigma_r = \sigma\cos^2\theta = \frac{1}{2}\sigma(1+\cos2\theta) = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sigma\cos2\theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma\sin^2\theta = \frac{1}{2}\sigma(1-\cos2\theta) = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sigma\cos2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma\sin2\theta$$

重ね合わせの原理（図２参照）

解く問題 = 問題(i) + 問題(ii)

問題(i)，　θに依存しない（静水圧応力）

問題(ii)，θに依存する

(i) 外圧 $+\sigma/2$を受ける円筒の問題（図３参照）

$$\sigma_r = A/r^2 + B(1+2\ln r) + 2C$$

$$\sigma_\theta = -A/r^2 + B(3+2\ln r) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

境界条件（σ_r）

$b \to \infty$ （$r \to \infty$）で応力有限　　　$B = 0$

$r = a$ で $\sigma_r = 0$　　　$A/a^2 + 2C = 0$

$r = b$ で $\sigma_r = \sigma/2$　　　$A/b^2 + 2C = \sigma/2$

$$\therefore A = -\frac{\sigma}{2}\frac{a^2}{1-(a/b)^2}, \qquad 2C = \frac{\sigma}{2}\frac{1}{1-(a/b)^2}$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\frac{1-(a/r)^2}{1-(a/b)^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\frac{1+(a/r)^2}{1-(a/b)^2}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$b \to \infty$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \to r \to \infty \text{ で } \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}$$

境界条件（σ_θ）を満足

$\tau_{r\theta} = 0$

(ii) 応力はθの偶関数（x軸に関して対称）

rのみの関数f(r)を用い、次式の形に分離

$$\phi = f(r)\cos 2\theta$$

重調和方程式

$$\nabla^2\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{4}{r^2} f\right)$$

$$= \frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{9}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{9}{r^3}\frac{df}{dr}$$

$$= 0$$

解は$f=r^n$の形をとる。

これを代入して nの値を定めると、n=4, 2, 0, -2が得られる。

一般解

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D$$

応力関数

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D\right)\cos 2\theta$$

応力

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

境界条件

r = b

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2}\right)\cos 2\theta = \frac{\sigma}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2}\right)\sin 2\theta = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\theta$$

r = a

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2}\right)\cos 2\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2}\right)\sin 2\theta = 0$$

θに無関係に成立、（）の中身が0

$$\therefore\ A = -\frac{\sigma}{4},\ B = 0,\ C = -\frac{a^4}{4}\sigma,\ D = \frac{a^2}{2}\sigma$$

応力

$$\sigma_r = \sigma\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = -\sigma\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \sigma\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\sin 2\theta$$

bに無関係

$r \to \infty$で $\sigma_\theta = -\frac{\sigma}{2}\cos 2\theta$

境界条件を満足

(i) + (ii)

$b \to \infty$ $(a/b = 0)$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] + \frac{\sigma}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4-4\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] - \frac{\sigma}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\sin 2\theta$$

y軸上の応力 σ_θ 図4参照)

$\theta = \pi/2$, $\cos 2\theta = -1$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]$$

$r = a$ で $\sigma_\theta = 3\sigma = \sigma_{max}$

$r = 3a$ で $\sigma_\theta \fallingdotseq \sigma$ （サンブナンの原理）

x軸上の応力 σ_θ （図４参照）

$\theta = 0$, $\cos 2\theta = 1$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]$$

$r = a$ で $\sigma_\theta = -\sigma$

$r = 3a$ で $\sigma_\theta \fallingdotseq 0$ （サンブナンの原理）

y軸上の応力 σ_r（図５参照）

$\theta = \pi/2$, $\cos 2\theta = -1$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[3\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]$$

$r = a$ で $\sigma_r = 0$

$r = 3a$ で $\sigma_r \fallingdotseq \frac{1}{6}\sigma$

$r = \infty$ で $\sigma_r \to 0$ （サンブナンの原理）

x軸上の応力 σ_r（図５参照）

$\theta = 0,\ \cos 2\theta = 1$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[\,2 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 - 5\left(\frac{a}{r}\right)^2\,\right]$$

$r = a$ で $\sigma_r = 0$

$r = 3a$ で $\sigma_r = \dfrac{3}{4}\sigma$

$r \to \infty$ で $\sigma_r \to \sigma$ （サンブナンの原理）

せん断応力 $\tau_{r\theta}$

$\theta = 0$（y軸上） で 0

$\theta = \pi/2$（x軸上） で 0

$\theta = \pi/4$（$\sin 2\theta = 1$） で 極値

$r = a$（円孔縁） で 0

応力集中係数 α

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = 3$$

楕円孔（図６参照）

$$\sigma_{max} = \sigma\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$

$\rho = a$

$\sigma_{max} = 3\sigma$

$\rho \to 0$

$\sigma_{max} \to \infty$

円孔をもつ帯板（有限幅）の応力集中（図７、図８参照）

$$\sigma_o = \frac{P}{2(b - a)h}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_o}$$

$a/b = 0 \to \alpha = 3$

$a/b = 1 \to \alpha = 2$

演習問題

直径 dの薄肉中空円筒（厚さ t）に横孔（半径 a）がある。捩った場合（捩りモーメント T）、垂直応力とせん断応力の応力集中係数を求めよ。

解　答

振りモーメント Tとせん断応力 τ の関係（半径 $r = d/2$）

$$T = \int_A \tau r \, dA$$
$$= \int_A \tau \; r \; t \; r d\theta$$
$$= \tau r^2 t \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi \tau \; r^2 t$$
$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{2T}{\pi d^2 t}$$

参　考

$$\tau = \frac{16T}{\pi d_2{}^3 (1 - n^4)} = \frac{2T}{\pi r_2{}^3 (1 - n^4)}$$
$$t \ll r, \; r_1 \fallingdotseq r_2 = r$$
$$n = d_1/d_2 = r_1/r_2 = (r-t)/r = 1 - t/r$$
$$n^4 = (1 - t/r)^4 \fallingdotseq 1 - 4t/r$$
$$1 - n^4 \fallingdotseq 4t/r$$

円孔の応力集中（単軸引張り）

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] + \frac{\sigma}{2}\left[1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos 2\theta$$
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] - \frac{\sigma}{2}\left[1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]\cos 2\theta$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\left[1 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\sin 2\theta$$

y軸上（$\theta = \pi/2$）

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[3\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]$$
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)$$

$r = a$　　$\sigma_r = 0$
　　　　　$\sigma_\theta = 3\sigma$

x軸上（$\theta = 0$）

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[2 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 - 5\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right]$$

$r = a$　　$\sigma_r = 0$
　　　　　$\sigma_\theta = -\sigma$

捩りの主応力

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau$$

σ_1による応力集中（σ_1の方向がx軸）

y軸上（$\theta = \pi/2$），$r = a$

$$\sigma_\theta = 3\tau$$

x軸上（$\theta = 0$），$r = a$

$$\sigma_\theta = -\tau$$

σ_2による応力集中（σ_2の方向がy軸）

x軸上（$\theta = 0$），$r = a$

$$\sigma_\theta = -3\tau$$

y軸上（$\theta = \pi/2$），$r = a$

$$\sigma_\theta = \tau$$

重ね合わせ

y軸上（$\theta = \pi/2$），$r = a$

$$\sigma_\theta = 4\tau$$

x軸上（$\theta = 0$），$r = a$

$$\sigma_\theta = -4\tau$$

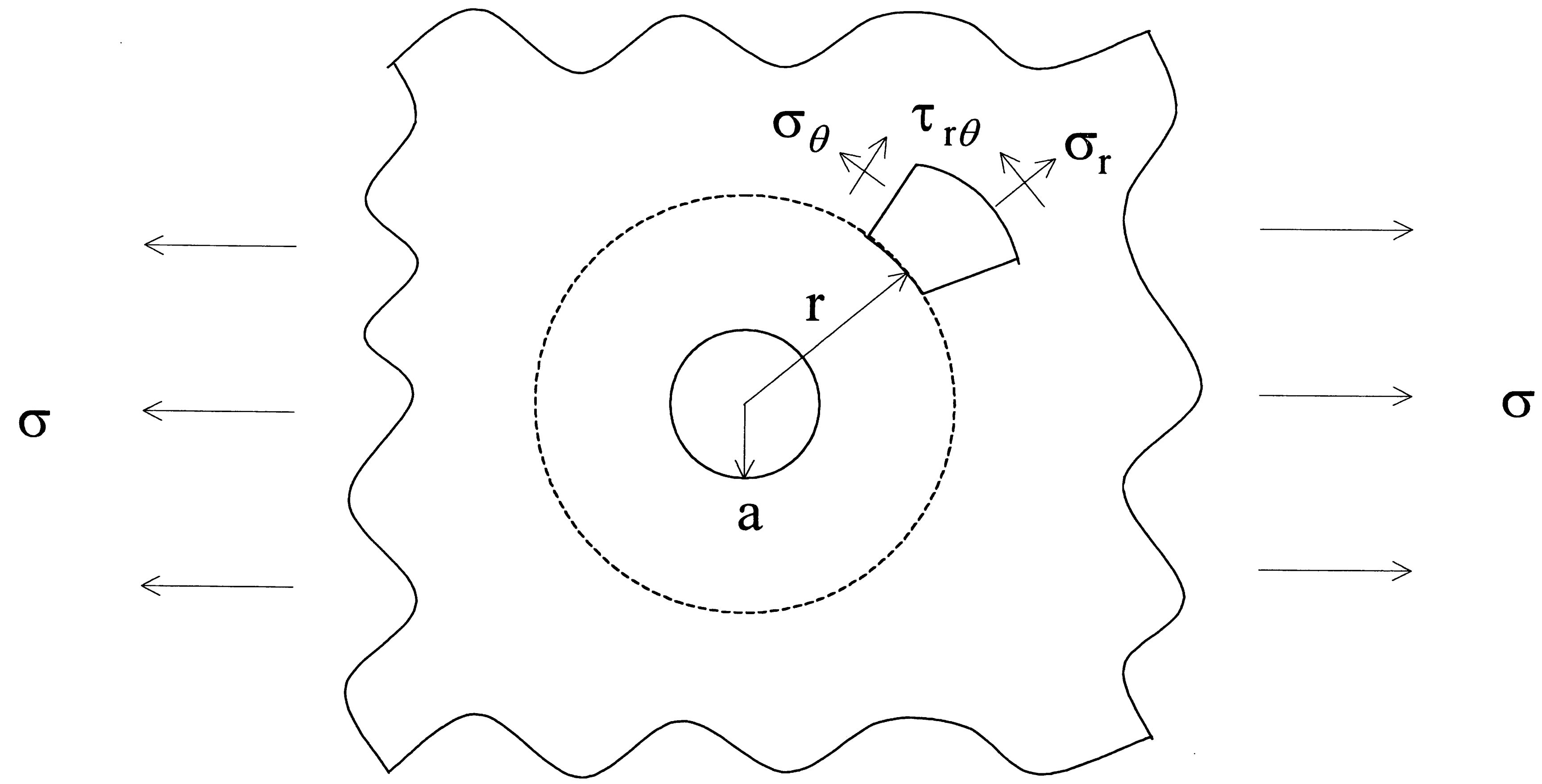
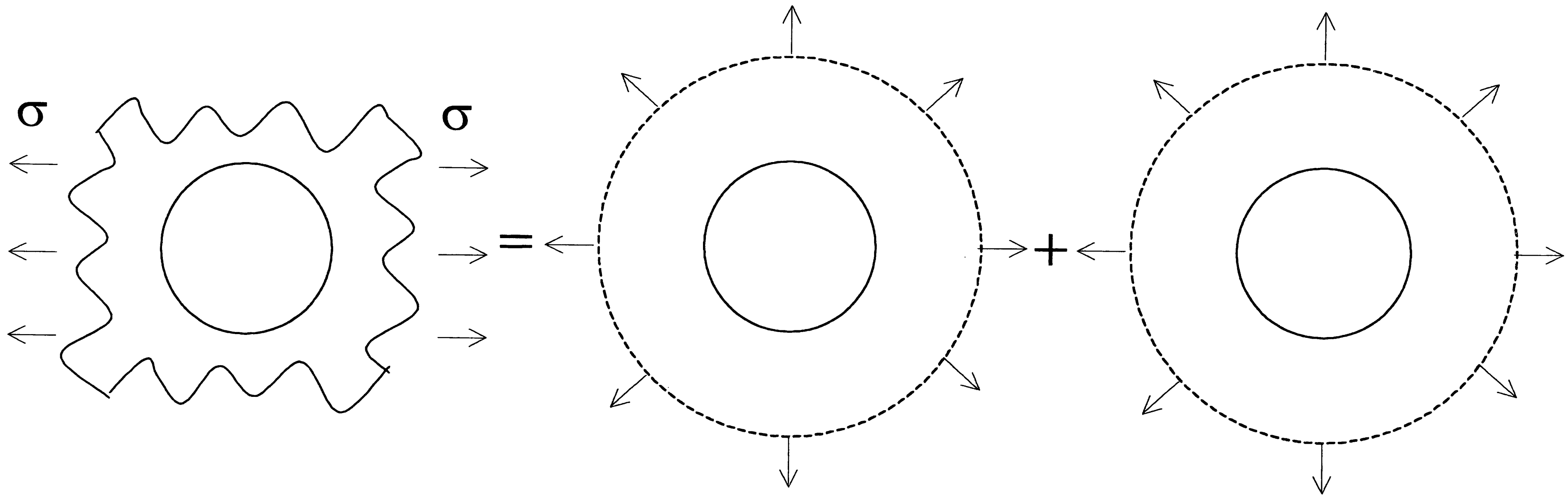


図1



$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2}\sigma\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\theta$$

図2

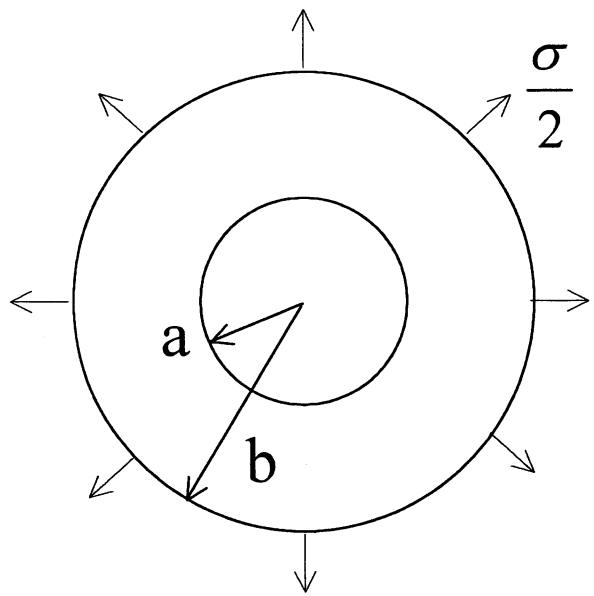


図3

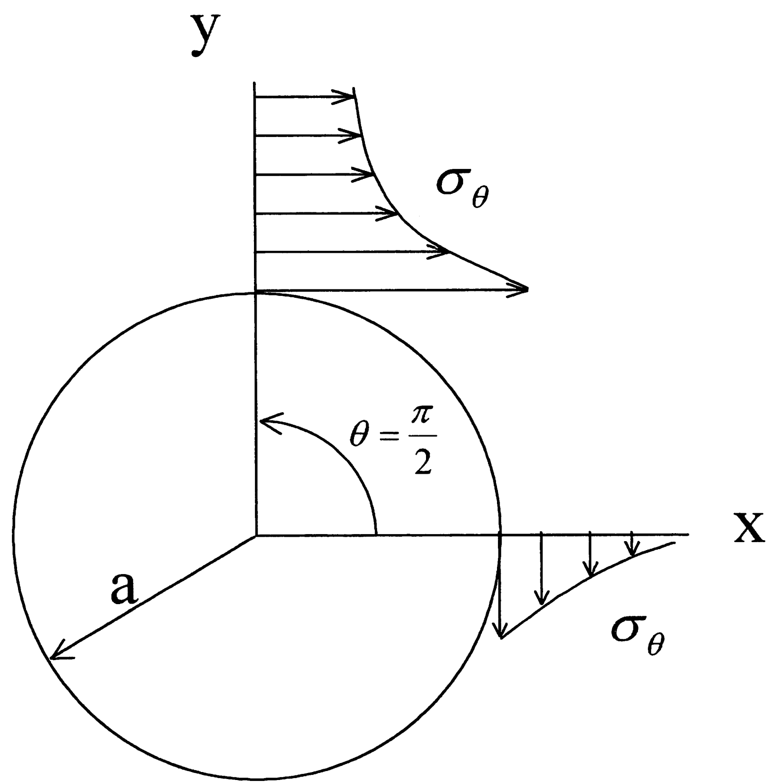


図4

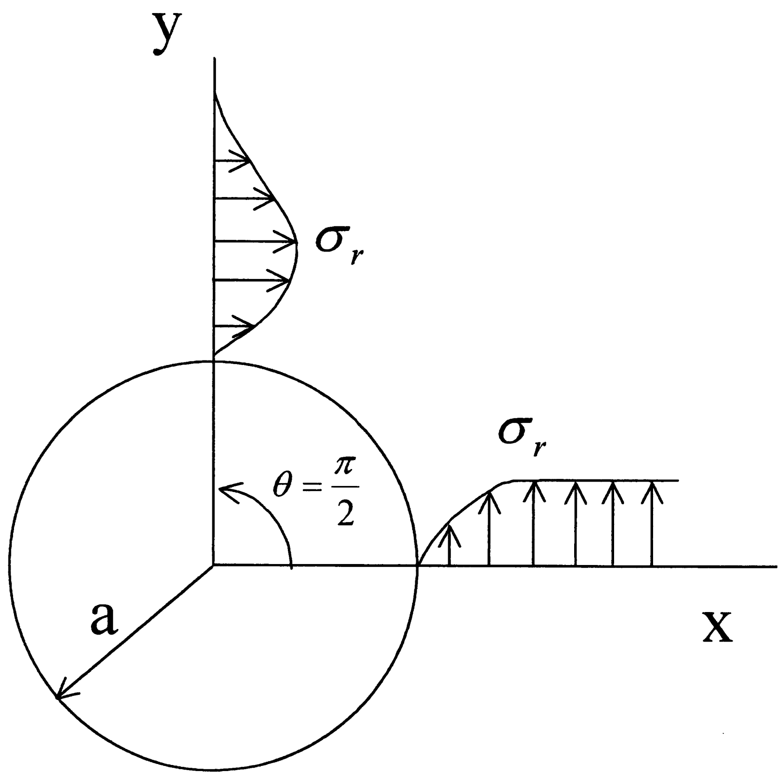


図5

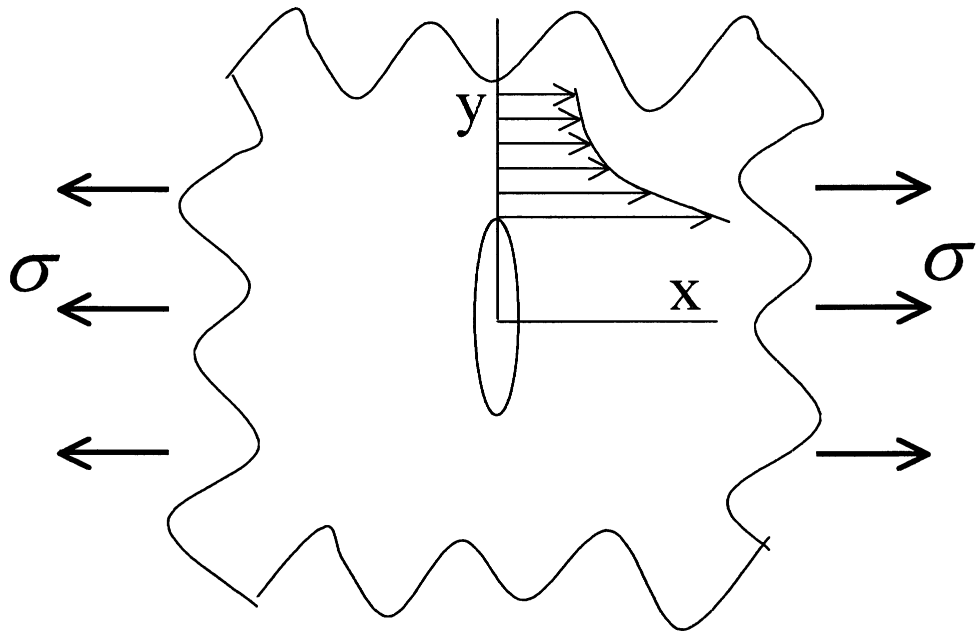


図6

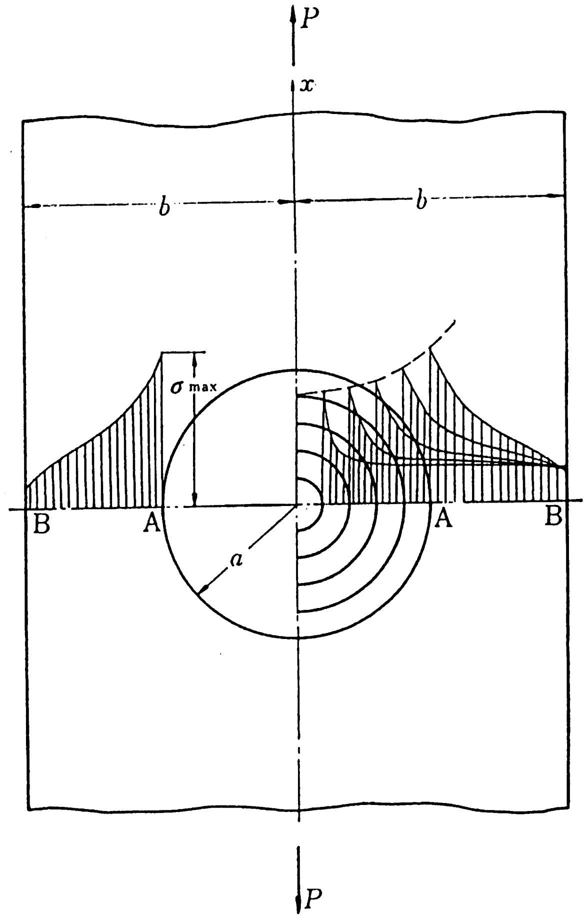


図 12.11　円孔をもつ帯板の応力分布

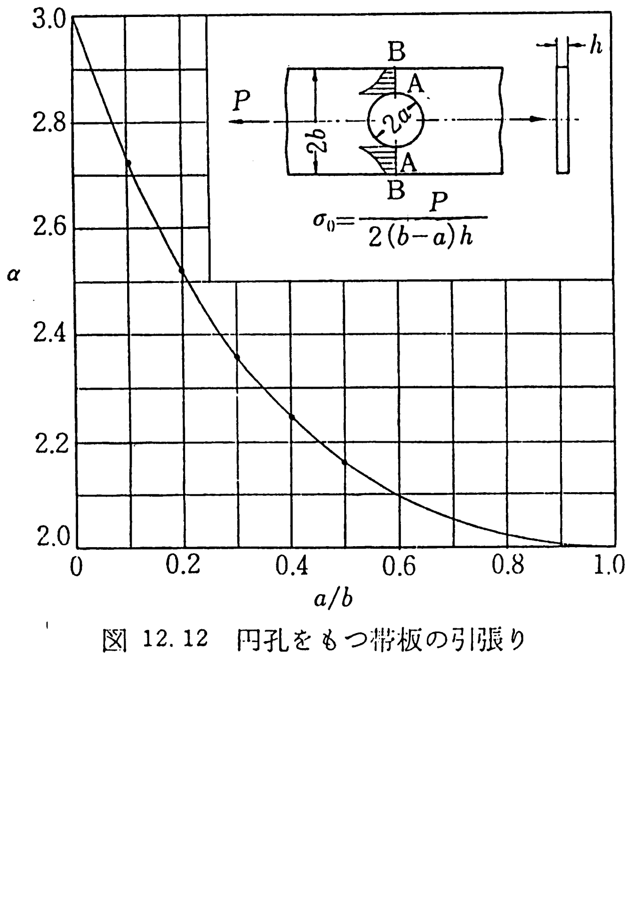


図 12.12　円孔をもつ帯板の引張り