

応答曲面法

東京工業大学 工学部 機械宇宙学科 轟 章
e-mail:atodorok@ginza.mes.titech.ac.jp
http://florida.mes.titech.ac.jp

1. 応答曲面法入門

応答曲面 (Response Surface) とは, n 個 ($n > 1$) の予測変数 (Predictor variables) x_i ($i=1\dots n$) から予測される応答 (Response) y の関係式を近似したものである.

$$y = f(x_1 \cdots x_n) + e \quad (1)$$

ここで, e は誤差(error)と呼ばれる. 応答曲面法において関数形に制限はない. 応答曲面法は製品プロセスの最適化やばらつきの減少などの品質工学分野において特にアメリカで実用化されている手法である.

一般の品質工学分野では, 取り扱いが簡単であるので多項式が多く用いられている. しかし, 変数変換を行うことで線形化可能な非線形関数も多く用いられる. 例えば, 指数関数, べき乗関数, 有理関数, 対数関数, ロジスティック関数などである. また, 非線形回帰の手法を用いることで, 一般的な有理関数やニューラルネットワークなども応答曲面に適用できる. ただし, 非線形回帰では一般的に有効な実験計画法が無く, また統計的評価も一般に困難であるため線形関数を用いる際の有力な統計ツールが使用できないという欠点を持っている.

極端な例として, 式(1)で $e=0$ の補間法も応答曲面の一つと言える. 例えば, 多変数のスプライン補間やラグランジュ補間なども応答曲面と言える. しかし, 一般に近似関数化したい応答は実験誤差や解析誤差あるいは不連続性などを持っているため, 単に補間法を適用することは好ましくない場合が多い. また実験や解析の点数も一般には少なく, 補間モデルと実際の関数形との差異に起因する補間の信頼性の観点から実際にはあまり適用されない. もちろん誤差を含まないで大量の測定が可能な場合や誤差をも含めて完全に離散データを連続関数化したい場合には補間法が適用されるべきである.

2. 最小2乗法による回帰曲面

応答曲面法は関数形状に関係無く, 近似関数を求めて最適化に使用方法であるが, 線形関数または線形化変換可能な関数は最小2乗法を用いることで容易にその関数の係数を統計的に推定することが可能であり, またその近似関数の統計的評価が可能である. ここでは, 最小2乗法(Least Squares Method)を用いた回帰曲面の作成手法に関する統計的手法を述べる.

応答関数として2次多項式 (Quadratic Polynomials) を採用した場合, 応答曲面は次式となる.

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

簡単化のため, 変数が2つの場合を例にとると, 式(2)は次式となる.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_2^2 + b_5 x_1 x_2 \quad (3)$$

式(3)において, $x_1^2 = x_3, x_2^2 = x_4, x_1 x_2 = x_5$ と変数を置換すると多変数2次多項式は多変数1次式に変換できる. 同様にして, 3次多項式, 4次多項式などの高次多項式も線形化可能である.

回帰式の係数の推定に用いる実験点の組の総数を n , 変数 (変換後の変数) の数を k とすると線形回帰モデルは行列表示で次式になる.

$$y = X + \quad (4)$$
$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{Bmatrix}$$

誤差 2 乗和を最小化することから係数 の不偏推定量 (unbiased estimator) \mathbf{b} が次式で得られる .

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (5)$$

式 (5) で得られる \mathbf{b} の分散共分散行列 (variance covariance matrix) $V(\mathbf{b}) = \text{cov}(b_i, b_j)$ は次式で表される .

$$V(\mathbf{b}) = \text{cov}(b_i, b_j) = s^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (6)$$

ここで, s^2 は応答 y の誤差分散である . s^2 の最尤推定値 \hat{s}^2 は n が十分大きい場合, 残差平方和 SSE (Square Sum of Errors) から次式で計算できる .

$$\hat{s}^2 = \frac{SSE}{n - p} \quad (7)$$

$$SSE = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (8)$$

ただし, ここで $p = n - k - 1$ である .

回帰モデルが適切かどうかの判定は一般には決定係数 (coefficient of multiple determination) を用いる . 決定係数 R^2 は次式で定義される .

$$R^2 = \frac{SSR}{S_{yy}} = 1 - \frac{SSE}{S_{yy}} \quad (9)$$

SSR は回帰 2 乗和 (Regression Sum of Squares) であり, 次式で定義される .

$$SSR = \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \quad (10)$$

S_{yy} は応答 y の平均値まわりの変動 (total sum of squares) で, 次式で定義される .

$$S_{yy} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \quad (11)$$

決定係数とは, 回帰モデルの適合性を示す指標となっている . 例えば, 回帰式が完全に応答に一致していれば, 式(10)の SSR と式(11)の S_{yy} は完全に同一となり, 決定係数 R^2 は 1 となる . $S_{yy} = SSR + SSE$ の関係があるので, 残差があれば必ず決定係数は 1 より小さくなる . つまり, 0 - 1 の間の数を決定係数はとる . ただし, 変数を多くすれば残差は減少するので, 決定係数の値が高いものが良い回帰モデルと断定はできない . 回帰モデルの良否の比較には, 単位自由度あたりの残差を比較する必要があり, 一般には自由度調整済み決定係数 R_{ad}^2 が使用される .

$$R_{ad}^2 = 1 - \frac{SSE / (n - k - 1)}{S_{yy} / (n - 1)} \quad (12)$$

自由度調整済み決定係数は不要な変数が追加されたときには低下する .

回帰モデル中の各係数は回帰係数の t 検定でその有意性判定をすることができる . 回帰式の j 番目の係数 $\beta_j = 0$ つまり j 番目の変数が回帰式に寄与していないという仮説をたて, 検定を実施する . この場合の t 値は次式で表される .

$$t_0 = \frac{b_j}{\sqrt{\hat{s}^2 C_{jj}}} \quad (13)$$

ここで C_{jj} は式 (6) の正方行列 $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ の j, j 成分である . この仮説係数 $\beta_j = 0$ は t_0 の絶対値が $t_{\alpha/2, n-k-1}$ より大きいときに否決される (変数が有効と判定される) . $t_{\alpha/2, n-k-1}$ は自由度 $n-k-1$ 信頼係数 $1-\alpha$ の t 分布の値である . t 分布の値は統計学の教科書の付録にあるので参照されたい . 参考のため, $\alpha = 0.05$ の場合の t 値を表 1 に示す .

表 1 $\alpha = 0.05$ の t 値

自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23

自由度	12	14	16	18	20	30	40	60	120	
t	2.18	2.14	2.12	2.10	2.09	2.04	2.02	2.00	1.98	1.96

例えば、実験点数 16 個 ($n=16$)、未知係数の総数 6 ($k=6$) の場合、自由度は $16-6-1=9$ であるので、95% 検定 ($\alpha=0.05$) の場合、t 値は表から 2.26 となる。

各回帰モデル中の係数の t_0 は一般的には回帰モデルに依存して異なるため、棄却された変数を削除したり、別の変数を追加することに各変数の t_0 は変化する。ただし、直交関数と直交表計画を用いた場合には各係数は独立となるため、各係数を独立に判定することが可能である。一般の多項式では除去によって t_0 値が変化するため、 t_0 は削除や追加によって回帰モデル変更することに計算しなおす必要がある。最適な回帰モデルを求めるには、変数を増減してゆく増減法 (step wise) の他に、変数を増加させる方法や減少させていく方法がある。

減少法は簡単であるが、多くの項が削減されてしまう場合、削減後に一度削減した項を追加すると回帰が向上する場合もあり、真の最適回帰モデルを提示する保証はない。変数が少なく高次項が無い低次多項式などや、削除する項数が少ない場合には簡単であり非常に有効である。一般的には少ない項数から開始して増減させる増減法が多く用いられる。

各係数の推定値 b の信頼区間 (confidence interval) は t 分布を用いることで計算される。100(1- α)% の信頼区間は次式で表される。

$$b_j - t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{s}^2 C_{jj}} \leq b_j \leq b_j + t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{s}^2 C_{jj}} \quad (14)$$

ある点 x_0 における応答 $y(x_0)$ の平均値 $\mu(x_0)$ の信頼区間は次式で表される。

$$\hat{y}(x_0) - t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{s}^2 x_0^T (X^T X)^T x_0} \leq m(x_0) \leq \hat{y}(x_0) + t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{s}^2 x_0^T (X^T X)^T x_0} \quad (15)$$

ここで、 $\hat{y}(x_0)$ は応答曲面による点 x_0 の応答である。

また、点 x_0 における応答 $y(x_0)$ の予測値 $y_0(x_0)$ の信頼区間は次式で表される。

$$\hat{y}(x_0) - t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{s}^2 (1 + x_0^T (X^T X)^T x_0)} \leq y_0(x_0) \leq \hat{y}(x_0) + t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{s}^2 (1 + x_0^T (X^T X)^T x_0)} \quad (16)$$

同一の応答に対して、2つの実験値の集団から2つの応答曲面が得られ、それらに差異があるかどうかの検定も統計的に行うことができる。2つの集団の実験個数をそれぞれ n_1, n_2 とし、変数の数を k 個、 $p=k+1$ とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_2 \end{aligned} \quad (17)$$

仮説は $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ となる。この仮説の検定に使用する統計量 W は次式で表される。

$$W = \left(\frac{SSE_0}{SSE_{12}} - 1 \right) \left(\frac{n-2p}{p} \right) \quad (18)$$

ここで、 SSE_0 は n_1, n_2 をすべて用いた時の応答曲面の誤差平方和であり、また式(18)において $n=n_1+n_2$ である。 SSE_{12} は次式で表される。

$$SSE_{12} = (n-p)(SSE_1 + SSE_2) \quad (19)$$

ここで、 SSE_1, SSE_2 はそれぞれ応答曲面 1 および 2 の誤差平方和である。 W が F 分布の $F_{\alpha, p, n-2p}$ の値を超える場合には仮説が棄却され、2つの応答曲面は異なるものと判断される。

なお、t 分布は F 分布の特別な場合であり、計算に都合がよいように分布関数を選択しているにすぎない。係数の検定は t 分布でも F 分布でも可能である。

これまでは線形関数かまたは多項式で線形関数に容易に置換可能な関数を取り扱ってきた。実際にはこれらの関数ばかりではなく、非線形関数が必要な場合も多い。非線形関数を用いる場合には、変数変換を行うことで、線形関数に変換が可能であるものがある。例として表 2. にこれらを列挙する。

表2 変数変換の一例

関数	変数変換	線形化後関数
$y = a + b \log x$	$x' = \log x$	$y = a + bx'$
$y = ax^b$	$y' = \log y, x' = \log x$	$y' = \log a + bx'$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$y' = \frac{1}{y}, x' = \frac{1}{x}$	$y' = a + bx'$
$y = ae^{bx}$	$y' = \log y$	$y' = \log a + bx$
$y = \frac{e^{a+bx}}{1 + e^{a+bx}}$	$y' = \log \left(\frac{y}{1-y} \right)$	$y' = a + bx$

3. 実験計画

実験計画法とは本来は実験の実行に予想外の因子の影響をさけるための計画であるが、より良い回帰式を得るためのより良い実験値を集める手法でもある。実験計画法は既に品質工学の分野で広く用いられている^{[1]-[3]}。ここでは応答曲面を求める場合に限定して解説する。

式(6)において、回帰式の各係数の分散を小さくするには、 σ^2 と $(X^T X)^{-1}$ の対角成分を小さくすれば良いことがわかる。 σ^2 は応答 y に関連するが、 $(X^T X)^{-1}$ は実験点の座標だけに起因しており、この $(X^T X)^{-1}$ の対角成分を最小化すれば、 y の分散が未知であっても回帰係数分散を相対的に最小化可能である。実験計画には多くの種類があるが、全ての実験計画では、この $(X^T X)^{-1}$ の対角成分を最小化することを目的としている。

3.1 水準 (Level)

実験計画法においては、連続変数の場合においても無限の組み合わせを考慮することが実用的でないことから水準という離散化された変数で考える。水準を用いて変数を離散化することは離散化によってノイズに強くなるという利点も有している。また、定量的でない変数も水準化することで擬似的に定量化可能である。

例えば、ある炉の反応を応答曲面で最適化する場合を例に取る。温度 T と圧力 P は定量的な変数である。これに触媒 A 社と B 社という因子があったとする。温度 T は炉の温度調節が精度が無いので 120, 125, 130 の3通り (3水準) とし、それぞれ -1, 0, 1 の水準とする。圧力は 5 気圧, 5.2 気圧, 5.4 気圧とし、それぞれ -1, 0, 1 の水準とする。触媒は 2 社なので A 社を -1, B 社を 1 とする。このように水準を定義することで、実用的な組み合わせ数で、しかも実験誤差などに左右されにくいデータをとることができる。また、2 値程度の簡単な定性的データも定量化できる。ただし、定性的データが多数ある場合には水準の割り振りが単純ではない。これについては本書を越えているので、数量化などについて学習されたい。

この例では、 $3 \times 3 \times 2$ の 18 通りの水準の組み合わせがある。18 通り程度であれば、全てを実行可能であり、通常すべての場合を実行して応答曲面を求める。これを全因子計画 (Full Factorial Design) と呼ぶ。

3.2 直交計画 (Orthogonal Design)

直交計画は 1 次多項式 (線形重回帰) の実験計画に通常は使われる。実験点の座標の集合 X を直交にとることで $X^T X$ は対角行列になる。例えば変数の範囲を -1 から 1 までに規格化された 3 つの変数 x_1, x_2, x_3 の線形重回帰では、未知係数が定数項を含めて 4 個であるので、経験的にその 2 倍の 8 個の実験点が必要と判断される。3 変数直交計画で 8 個の実験計画を行なった場合、2 水準全因子計画 (2-level full factorial designs) と同じになる。ここで、2 水準とは因子の取り得る水準 (Level) が -1 と 1 などのように 2 つだけしかないということである。

4 変数以上では変数の数を k とすると、未知係数が $k+1$ であるのに対して、直交計画の可能実験点は 2^k で増加するため、2 水準の全因子計画と異なる。

3 変数で上記の表を使用した場合、 $(X^T X)^{-1}$ は $I/8$ (I は単位行列) となり、係数の分散は最小となる。表 3 に 2 水準の $L8$ 直交表を示す。

主効果だけの 1 次多項式による応答曲面 (線形重回帰) の場合、 $L8$ 直交表では 7 つの変数の応答曲面まで変数を割り付けることができる。ただし、7 変数の場合には未知係数が 8 個であるので、飽和回帰になる (残差ゼロ) ので適切ではない (補完法と同じ)。7 変数未満の主効果だけの応答にはどの列に変数を割り付

けても問題はない。

表3 L8 直交表

No.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	1	1	1	1
3	-1	1	1	-1	-1	1	1
4	-1	1	1	1	1	-1	-1
5	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	1	-1	1	1	-1	1	-1
7	1	1	-1	-1	1	1	-1
8	1	1	-1	1	-1	-1	1
列名	a	b	ab	c	ac	bc	abc

変数間に交互作用が無視できない場合には、直交表の列に変数を割り付ける際に注意する必要がある。例として(1)~(7)の各列に変数 A, B, C, D, E, F, G を割り当てる場合を考える。この応答には A と B に交互作用があるとすると、3 列目の C の場合、 $A \times B$ の作用は次のようになる。

C[-]: A-B-, A-B-, A+B+, A+B+

C[+]: A-B+, A-B+, A+B-, A+B-

ここで、C[-]は変数 C の-1 の場合、C[+]は C の 1 の場合であり、A-B+は A が-1, B が+1 を意味している。この関係から明らかなように A, B の影響が平等ではない。これに対して、4 列目の変数 D の場合、 $A \times B$ の作用は次のようになる。

D[-]: A-B-, A-B+, A+B-, A+B+

D[+]: A-B-, A-B+, A+B-, A+B+

この結果から、D[-]と D[+]で A, B の影響は平等に現れていることがわかる。

直交表には通常列名が付いている。列名, a, b, c はそれぞれ独立した変数を割り付けることが可能である。これに対して、(3), (5), (6), (7)列は交互作用を表しており、交互作用がある場合にはこれらの列に変数を割り付けることができない。

このように主効果だけまたは 1 次の交互作用までの 1 次モデルでは直交計画は非常に効果的であるが、2 次以上の多項式回帰モデルでは実験点が不足してしまう。この場合には 3 水準直交表などの多水準直交表を用いる。3 水準直交表の例として L 27 直交表を表 4 に示す。多水準直交表は低水準直交表から作成することが可能である。

ただし、単純な多項式を回帰モデルに用いた場合には、多水準の直交表を用いても $(X^T X)^{-1}$ は対角行列にはならず、直交実験とはならない。そこで、2 次以上の多項式には直交多項式を用いる。一般にはチェビシェフ(Chebyshev)の直交多項式が多く用いられる。直交多項式と直交表を用いることで直交実験となる。チェビシェフの直交関数を用いた応答曲面では、等間隔の水準(実験点を離散化した点)を用いる。2 変数 x_1, x_2 の等間隔水準の区間の場合、チェビシェフの直交関数は次式になる。

$$y = b_{00} + b_{10}(x_1 - \bar{x}_1) + b_{01}(x_2 - \bar{x}_2) + b_{11}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + b_{20}[(x_1 - \bar{x}_1)^2 - \frac{a_1^2 - 1}{12} h_1^2] + b_{02}[(x_2 - \bar{x}_2)^2 - \frac{a_2^2 - 1}{12} h_2^2] + \dots \quad (20)$$

ここで、 \bar{x}_1, \bar{x}_2 はそれぞれ変数 x_1, x_2 の平均値、 a_1, a_2 はそれぞれの変数の水準数、 h_1, h_2 は水準間隔である。この 2 変数の直交多項式の各係数は、 $x_3 = (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)$, $x_4 = [(x_1 - \bar{x}_1)^2 - \frac{a_1^2 - 1}{12} h_1^2]$, $x_5 = [(x_2 - \bar{x}_2)^2 - \frac{a_2^2 - 1}{12} h_2^2]$ という変数変換を行うことで線形重回帰問題に変換できる。この際、 $(X^T X)^{-1}$ 行列は対角行列となり、それぞれの変数は互いに直交する。このため、直交表で直交関数を用いた場合には、t 値が回帰モデルの他の項の影響を受けない。つまり変数の追加や削除が独立に行うことができる。

一般の直交表直交関数近似においては、多項式の係数は表計算で簡単に求めることができる。直交表の交互作用列成分はこの表計算時に簡便な計算手法のために使用される。

表4 L2 7 直交表

No.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
5	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
6	-1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
7	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0
8	-1	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	1
9	-1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
10	0	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
11	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
12	0	-1	0	1	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
13	0	0	1	-1	-1	0	1	0	1	-1	1	-1	0
14	0	0	1	-1	0	1	-1	1	-1	0	-1	0	1
15	0	0	1	-1	1	-1	0	-1	0	1	0	1	-1
16	0	1	-1	0	-1	0	1	1	-1	0	0	1	-1
17	0	1	-1	0	0	1	-1	-1	0	1	1	-1	0
18	0	1	-1	0	1	-1	0	0	1	-1	-1	0	1
19	1	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
20	1	-1	1	0	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
21	1	-1	1	0	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
22	1	0	-1	1	-1	1	0	0	-1	1	1	0	-1
23	1	0	-1	1	0	-1	1	1	0	-1	-1	1	0
24	1	0	-1	1	1	0	-1	-1	1	0	0	-1	1
25	1	1	0	-1	-1	1	0	1	0	-1	0	-1	1
26	1	1	0	-1	0	-1	1	-1	1	0	1	0	-1
27	1	1	0	-1	1	0	-1	0	-1	1	-1	1	0
列名	A	b	Ab	a ² b	c	ac	a ² c	bc	Abc	a ² bc	b ² c	ab ² c	a ² b ² c

以上のように直交表を用いる実験計画は1次多項式では広く用いられているが、2次以上の回帰モデルでは直交関数を使用することに制限されている。直交表実験計画は3水準直交表以上では実験数が多くなる。多変数の直交実験計画は1つではなく、多数存在する。自作する場合にはその中から交互作用を考慮して適切な直交表を選択する必要がある。

3.3 中央複合計画(Central Composite Design)

CCD は2次多項式の実験計画で最も多く用いられている。CCD は2水準全因計画と2k軸上の距離の点からなる。例えば、2変数(k=2)で $\alpha = 2$ の場合、CCD は表5のようになる。

表5 2変数の中央複合計画 ($\alpha = 2$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_1	1	1	-1	-1	0	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	0	0	0
x_2	1	-1	-1	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	0	0	0	0

$\alpha = 2$ の場合には、 $-1 \sim 1$ の変数の範囲を超えて実験することを要求している。一般には変数空間全体を一度に近似する応答曲面を作成することはしないで、その中の一部だけを取り出して応答曲面近似することが多いため1を超えても問題はない場合が多い。1を超えることが困難な場合には、 $\alpha = 1$ とすることで同様の実験計画が可能となる。

表5の実験計画を行列形式で書くと次式になる。

$$\begin{array}{cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 \\
 \mathbf{X} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1.414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1.414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1.414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1.414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$X^T X$ 行列は次式になる .

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

このように、CCD では $X^T X$ 行列は対角行列にはならない。CCD では分散を最小化すると同時に分散の方位依存性を無くしている。つまりどの方位にも分散が等しくなるように回転可能にしている。この回転可能設計 (rotatable design) という点が CCD の最重要点である。中央実験点がないと $X^T X$ が特異行列になるため、少なくとも 1 つの実験点が中央に必要である。設計変数の外側に実験点を配置できない場合には、 ± 2 の点を ± 1 とするよう座標変換するか ± 2 を ± 1 と置き換える。 ± 2 を ± 1 に変換すると、本来の設計変数の範囲の正方形に内接する円を近似空間に選択しなおしていることに相当する。 ± 2 を ± 1 と置き換えることは正方形の辺上の中点に実験点を配置することに相当する。4 辺の中点に実験点を配置すると回転可能性は若干低下してしまうが中央点付近の回転可能性は十分に高い。

直交表と直交 2 次関数では分散の方位依存性が生じる。このため、2 次関数を使用する際には一般には CCD の方が良い。しかし、近似する空間が十分狭い領域であればこの差異は問題とならない。一般に 2 次関数では広大な領域を近似することは不可能であり、領域分割をするためこの分散の方位依存性はあまり問題とならない場合が多い。2 変数以上の場合の CCD については参考文献を参照されたい。

3.4 計算機支援計画

電子計算機の発展に伴い、表を用いた実験計画から計算機支援の実験計画が目されるようになってきた。計算機支援の実験計画は、あらかじめ実験計画の候補点を多数用意しておき、そのなかから次に述べる最適性を用いて最適実験計画の組み合わせを求めるものである。計算機支援の実験計画は計算機の発展によって最近用いられるようになった。計算機支援の方法は使用法が簡単であり、現在は多く用いられている。計算機支援実験計画はいくつか提案されており、アルファベットを用いて命名されている。A, D, G, Q 最適基準が有名であり、下記に説明する。なお、これら以外にも、存在し、これは最後に述べる。

i) A 最適基準 (A-Optimality)

A 最適基準は応答曲面の係数の分散を最小化する最適化基準である。正規方程式で求められる応答曲面の各項の係数の分散は応答 y の分散 と正方マトリックス $X^T X$ の逆行列からなる。この分散を小さくするには小さくすることも重要であるが、 $(X^T X)^{-1}$ の対角成分を大きくすれば係数の分散は相対的に小さくすることができる。この $(X^T X)^{-1}$ は近似モデルと実験点の座標だけで決定される。 $X^T X$ を実験数 k で除したものはモーメント行列と呼ばれている。

$$M = \frac{X^T X}{n} \quad (21)$$

A 最適基準はこのモーメント行列の逆行列の対角成分の和 (trace) に着目し、これを最小化する実験計画の最適基準である。

$$\text{Min} [\text{trace}(M^{-1})] \quad (22)$$

A 最適基準は対角成分だけを考慮し、応答曲面の各項の係数の共分散は考慮しない。このため、A 最適な実験計画でも共分散の絶対値が大きい場合が存在し得る。共分散の絶対値が大きいことはその変数 x_i と x_j の実験計画に偏りがあることを意味する。つまり回転可能性という観点からは良好ではない実験計画になり得る。

ii) D 最適基準 (D-Optimality)

D 最適基準はモーメント行列の行列式を最大化する実験計画の最適化基準である。

$$\text{Max} |M| \quad (23)$$

変数の座標範囲が $-1 \sim 1$ に正規化されている場合、D 最適性の優劣を表す D_{eff} (D-efficiency) は次式で定義される。

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\text{Det}[X^T X])^{1/p}}{n} \quad (24)$$

ここで、 p は未知係数の数である。 D_{eff} は最大値が 1 となり、大きいほど良い実験計画となる。例えば、変数が 2、実験数が 9 個 (中央点実験数 1) の CCD の D_{eff} は 0.9862、中央点実験数を 2 とした場合には 0.9964 である。

一般に逆行列の各成分にはその行列の行列式の逆数がかげられる。D 最適基準は $(X^T X)$ 行列の行列式を最大化することで $(X^T X)^{-1}$ 行列の全成分を相対的に最小化している。これによって、D 最適基準はモーメント行列の対角成分だけでなく、共分散成分も含んでいる。つまり D 最適基準は係数全体の分散を考慮した一般化分散を最小化させている。このため、D 最適基準で選択された点は回転可能性という点からも良好な実験計画である。

ii) G 最適基準と Q 最適基準 (G-Optimality and Q-Optimality)

実験点数 n で規格化された推定値分散 $v(x) = n\text{Var}[\hat{y}(x)]/2$ は次式で表される。

$$v(x) = \frac{n\text{Var}[\hat{y}(x)]}{2} = nx_m^t (X^T X)^{-1} x_m \quad (25)$$

ここで、 x_m は設計空間内のある点の座標ベクトルである。G 最適基準はこの推定値分散の最大値を最小にする実験計画である。

$$\text{Min} [\text{Max} v(x)] \quad (26)$$

G 最適基準では、設計空間内の最大の推定値分散点を探索し、その後その値を最小にする実験計画を行う。このため、計算コストがかかるので一般にはあまり適用されない。

Q 最適基準は設計空間内で推定値分散を積分し、その積分値を最小化する実験計画である。

$$\text{Min} \left[\frac{1}{K} \int_R v(x) dx \right] \quad (27)$$

ただし、 R は設計空間全体の集合であり、 K は空間の積分値である。

$$K = \int_R dx \quad (28)$$

Q 最適基準は推定値分散を平均的に最小化するため有効であるが、設計空間全体の推定値分散を計算するため、計算コストが高く、あまり用いられていない。

これら A, D, G, Q の他に、 $X^T X$ マトリックスの固有値の最小値を最大化する実験計画 (E 最適基準) や、 $(X^T X)^{-1}$ マトリックスの対角成分の最大値を最小化する実験計画 (minimax 基準) などがある。

一般には計算機支援実験計画には D 最適計画が用いられる。推定値の分散を比較してみると、直交表 + 直

交関数は推定値分散が方位依存性を有している。つまり方位によって推定値の分散が異なり、回転可能でない実験計画になっている。また、L27 直交表 + 2 次直交関数の D_{eff} は 0.462 であり、CCD + 2 次多項式の D_{eff} は 0.996 である。このことから、D 最適であるほど推定値分散の方位依存性は少ないということがわかる。直交表 + 直交関数は計算が簡単であり、さらに高次の多項式にも対応できるという利点を有している。CCD は 2 次多項式だけに有効であり、それ以外には D 最適基準が必要である。CCD も D 最適も計算が複雑であり、また D 最適基準では近似に必要な実験点数を選択する必要がある、点の選択によっては必ずしも回転可能とはならない。このような点から、どちらも長所短所があるので、設計者の都合の良い方法を用いれば良い。ただし D 最適基準は、設計空間が不規則に離散的であったり、拘束条件がある場合に唯一有効な方法である。

4. 最適化手法と近似手法

4.1 全体近似法と最適化手法

応答曲面法は基本的にテイラー展開と同じであり、未知関数を 2 次までのテイラー展開する場合が 2 次応答曲面に相当する。例えば、2 次項までテイラー展開したときの近似関数は次式になる。

$$g^{(d)}(d) = f(x^{(m)}) + \nabla f(x^{(m)})d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 f(x^{(m)})d \quad (29)$$

これは、 x_0 周辺の 2 次応答曲面の係数が関数の偏微分で決定されることを意味している。つまり、基本的には微分可能な連続関数であれば必ず狭い領域では 2 次の応答曲面で近似可能である。実際には微分可能でなくても、誤差最小 2 乗の原理にしたがって、およその値を用いて適切な間隔の範囲内であればせいぜい 2 次多項式で十分な精度で近似可能である。

近似がうまく行かない場合の多くは、設計者が十分狭い間隔と感じている変数の領域が実際の応答の変化にとっては広い領域であり、大きな応答変化がある場合である。

したがって、現状の状態からわずかな変更を行うだけであれば、変更可能な変数範囲全体を一つの応答曲面に近似しても十分な精度が得られる。あるいは、変数変換などを用いて、凹凸の少ない非線形性の少ない関数に変換できれば全体を一つの応答曲面で近似できる。このような近似が可能であれば、残る問題は最適化だけである。

ここでは例として Microsoft Excel のソルバー機能を用いて次の応答曲面の最小値を求める問題を解く。

$$y = 1 + 0.5x_1 - 2x_2 - 0.2x_1^2 + 3x_2^2 + 0.4x_1x_2$$

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

Excel のセル A,B,C に以下の通りに代入する。

	A	B	C
1	X1	X2	Y
2	0.5	0.5	=1+0.5*A2-2*B2-0.2*A2*A2+3*B2*B2+0.4*A2*B2

セル A2 は変数 x_1 、セル B2 は変数 x_2 、セル C2 は応答 y である。

ツールメニューのソルバーを起動し（ソルバーはデフォルトではインストールされないので追加インストールが必要）目的セルを C2、変化させるセルを A2:B2 とする。最小ボタンをチェックする。制約条件の追加を指定し、A2 1, A2 0, B2 1, B2 0 を入力して実行ボタンを押す。

最小値は $x_1=0$, $x_2=0.33333$, $y=0.66667$ となる。

注意：Excel のソルバー機能はデフォルトではインストールされない。したがって、Excel のツールメニューにソルバーが無い場合には、Office か Excel の CD-ROM を入れて追加インストールで Excel のソルバーをインストールしなければならない。

4.2 応答曲面近似の改善手法

応答曲面法において、大きな問題点は応答の近似精度である。非線形性が強い問題や、設計空間中にスパイク状の変化があるような複雑な設計空間では、応答の近似精度が悪化してしまう。このような場合にいくつかの対応策がある。これには、拡大近似手法、領域分割近似、高次多項式近似がある。

拡大近似手法では多段階に応答曲面を作成する。これは全体応答曲面では設計空間をおよそ近似可能であるが近似精度に不満が残るような場合に適用される。全体を近似する全体応答曲面で最適点候補を求めた後に、最適点候補周囲だけの拡大応答曲面を作成し、真の最適点を探索する手法である。拡大範囲は急激に拡大することは危険であり、全体の 1/2 から 1/5 程度が良い。拡大応答曲面での最適点は拡大応答曲面の適用範囲に含まれていることを確認する必要がある。

応答曲面は別の観点では先に述べたように、未知関数の Taylor 展開と同じである。複雑な設計空間でも、

微分可能であれば分割された小領域では1次、2次や3次などの多項式で十分近似可能である。これは領域分割法であり、設計空間を複数の小領域に分割し、その領域内で応答曲面を作成して最適化を実施し、最適点の候補を求め、その集合から最適な点を選択する手法である。この方法は微分可能なスパイク状の変化がある設計空間でも適用可能であり、非常に複雑な空間にも適用可能である。しかし、領域の分割方法に注意が必要であり、少なくとも想定されるスパイク状の変化が推定される領域の大きさ程度に小さく分割する必要がある。このような場合には非常に多数点の応答を求める必要がある。領域分割と多段応答曲面を使用すれば、設計空間が微分可能な限り理論的にはどのような複雑な設計空間でも高精度で近似可能であり、最適解が得られる。ただし、微分不可能な関数、例えばインパルス関数のような場合には近似できない。しかし、このような場合には、むしろ最適解はわずかな変数の変動で急激に変化するため、実用的なロバスト性を有していないので実用的な最適解ではない。

設計空間の概形が既知である場合には、それを利用して領域を分割することが可能である。例えば、 $y=f(x)$ の関数近似で応答 y がおよそ山が3つある場合には、2次多項式で3つの領域に分割することで、精度の良い近似が低次の多項式で可能である。このような場合、高次多項式を用いることも選択肢の一つであり、高次多項式を用いるほうが実験点は少なくなる。しかし、高次多項式では、高次の交互作用項が一般に適用されており、これは実験に誤差が多く含まれる場合には、ごくわずかな変数の変動も大きな応答変化に近似してしまう。このような観点から、一般には高次多項式は危険であり、領域分割した低次の多項式による応答曲面が有効である。例外的に、変数がおよそ3次多項式になっていることが既知であるとか、変数の高次項は含まれるが、高次の交互作用項はないということが明らかな場合には高次多項式も有効である。

5. 複合材料の最適設計への応用

複合材料構造の最適設計には巨視的な設計と積層構成設計がある。巨視的な構造設計は例えば航空宇宙機器に多く見受けられるT型ストリンガー付積層板などの寸法最適化がある。単に寸法を最適化する場合には、金属材料構造と同じであり、ここでは取り上げない。複合材料の最適設計での問題は、複合材料積層板は一枚のプリプレグの弾性係数異方性が極端に強く、積層構成設計によって構造材料の物性値が大きく変化し、それに伴って局所座屈荷重や振動数などが大きく変化することである。このため予期しない局所座屈などを避けるには積層構成最適設計が必要不可欠である。残念ながら現在のところ巨視的構造寸法と積層構成とを完全に同時に最適化する手法は開発されていない。

巨視的な設計の場合には、一般に複合材料は薄板となるため、曲げ剛性の最適設計を無視して面内剛性だけを考慮し^{[4][5]}、 0° 層、 90° 層、 $\pm 45^\circ$ 層の厚さを連続変数で他の寸法などの設計変数と同様に最適化した後に、この層数割合を拘束条件として局所座屈などを避けるための積層構成最適化をGAで行う手法が行われている^[6]。

積層構成の最適設計には既に数多くの研究発表がある。近年最も注目されている最適化手法は遺伝的アルゴリズム(GA)を用いた方法である。GAによる積層構成最適化手法は文献^[7-10]に詳細に記述されているのでここでは省略するが、簡単に解説する。GAでは、最適化する変数を遺伝情報に暗号化する。遺伝子を持つ個体の適応度から次世代の子孫を適者生存の原理で再生していく。これで優秀な個体の遺伝子が次第に残り、最適化が行われる。アルゴリズム的に非常に簡単であるためプログラム作成は容易である。

GAでは拘束条件の導入が一般に困難である。積層構成最適化問題では、例えば 45° 層と -45° 層の層数を一致させるバランスルールや、巨大マトリックス割れを防止するための4層を越えて同一方位層を積層しない4層ルールなどがある。巨視的設計において 0° 層、 90° 層、 $\pm 45^\circ$ 層の層数割合が既に決定されている場合などもある。GAでは、個体適応度にペナルティを与えることでこれらの拘束条件を導入することが可能である。しかし、ペナルティは遺伝的アルゴリズムの正答率を著しく低下させる場合がある。轟らが開発した劣性遺伝子の遺伝子補修法^[10]は拘束条件違反遺伝子を読み替えることで拘束条件を満足する積層構成に変換する方法である。この方法は前述のいずれの拘束条件にも適応できる。層数の制限がある場合には、順列GAを用いることも可能である。

GAでは個体の評価を多数回実施するため、構造最適化問題ではFEM解析を多数回実施する必要があり、設計コストが高くなってしまふ。また、GAと汎用FEM解析のインターフェースプログラムを作成することは一般に面倒な作業である。これに対して、応答曲面法が適用されている。

積層構成最適化問題では、設計変数は各層の繊維配向角である。しかし、積層構成最適化問題の応答曲面の変数に直接繊維配向角を用いることは得策ではない。積層数が多い板では未知係数が膨大になることと、繊維配向角を設計変数にとると局所最大値が数多く存在するためである。このため、積層構成最適化問題には積層パラメータを設計変数とした応答曲面を用いるとよい。積層パラメータは無次元化量で繊維角度の \sin 、 \cos 間数値を板厚方位に積分したもので面内積層パラメータと面外積層パラメータがある^[12]。積層パラメータを用いた応答曲面は繊維角度の変数を積分変換していることに等しい。

積層構成から積層パラメータを求めることは容易であるが、積層パラメータから積層構成を求めることは容易でない。積層数が少ない場合には総あたりの最適積層構成を求めることは可能であるが、積層数が多い場合や補強板などの複数積層構成を扱う場合には GA が適している。例として、2 軸圧縮荷重を受ける矩形積層板（図 1）の座屈荷重最大化積層構成最適化問題を取り上げる。D 最適基準を用いて実験計画を行い、

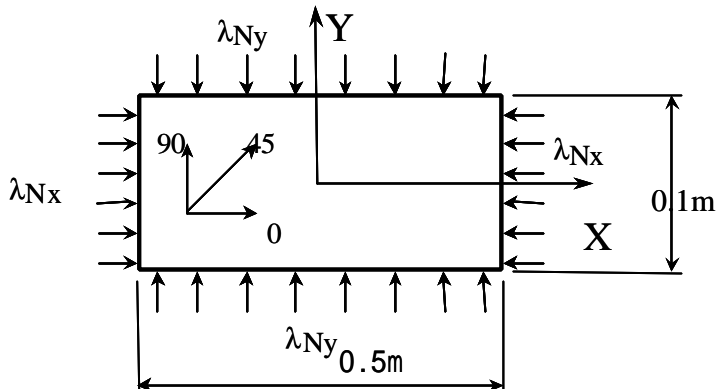


図 1 積層板寸法と負荷

座屈荷重比の応答曲面を作成した。これを実際の座屈荷重比と比較して図 2, 3 に示す。ただし、図中の縦軸と横軸は面外積層パラメータである。座屈荷重比が良く近似できていることがわかる。これを用いて GA で積層構成最適化を実施したところ、良い最適解が得られた。この時に必要な解析回数はわずか 12 回である。

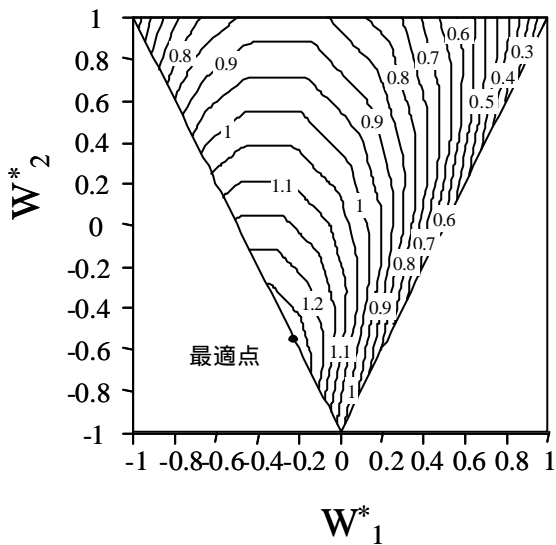


図 2 設計空間全体の等高線図

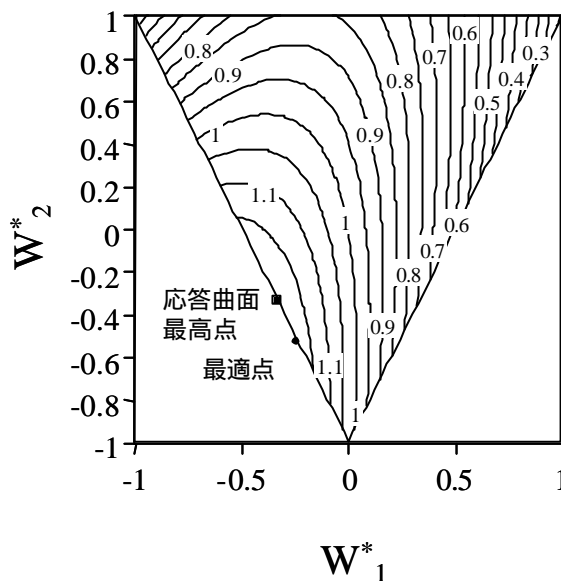


図 3 全体近似応答曲面の等高線図

6. 逆問題への応答曲面の適用

逆問題の解法としては既に数多く提案されているが、多くは多大な解析を要するかまたはデータベース検索を実施する手法であり、精度を犠牲にしたリアルタイムの逆解析に適切な手法としてはニューラルネットワークによる逆問題解析^{[13][14]}が知られている程度である。このニューラルネットワークを使用した手法は、実験や FEM 解析結果を教師信号として応答（結果）を学習させる方法であるが、基本的には多くの回帰データに非線形関数を回帰させている問題である。応答曲面は線形化可能な非線形関数を用いる点でニューラルネットワークをより汎化能力が劣る場合があるが、簡単に学習できる（逆マトリクス計算だけ）こと、統計的ツールで評価できること、実験計画が可能であることから、それにも勝る利点がある。特に、領域を分割した逆問題の推定に応答曲面を使用すれば、ニューラルネットワークと同じ汎化能力を有していながら作成コストが大幅に削減可能であり、なおかつ信頼性評価が統計的に可能であるという利点を有している。ここでは、関数の逆関

数を求める問題を例にして、応答曲面法の逆問題への適用例を示す。

順問題空間 ($y=f(x)$ の近似)での実験計画は逆問題空間 ($x=g(y)$ の近似)に最適である保証がない。逆問題 ($x=g(y)$ の近似)の応答曲面作成には応答 y を座標にして実験計画を行う必要があり、これには応答 y の全空間が既知であるかまたは膨大な応答 y の結果が必要であり一般には困難である。そこで、まず順問題を実験計画に基づいて応答曲面 $y=f(x)$ を作成する。その応答曲面を用いて全応答空間 y が近似的に得られる。この近似応答の集合から実験計画で逆問題の応答曲面に適した応答 y の集合を求め、それを与える座標 x を求める。求めた x から順問題を解くか実験により逆問題に適した真の実験点の応答 y を求める。この逆問題の実験計画点 y の集合から $x=g(y)$ の逆問題の応答曲面を求める。

簡単な例として、未知関数(ここでは $y = \tanh(x/0.2)$,ただし $0 \leq x \leq 1$)の逆関数を3次多項式で近似する問題を取り扱う。3次多項式の未知係数は4個であるので経験的にその倍として実験点は8個とする。均等に x を20分割した候補点からD最適基準で8個選択し、3次多項式で順問題の近似関数を作成する。近似した順問題の応答曲面から均等に20分割した点を作成し、その近似応答を計算して y の項候補点を20個作成する。 y の20個の候補から逆問題の近似関数に適切な点をD最適基準で8個を選択する。選択した8個の点の x 座標から真の応答 y を計算し、その y から x の関数を3次多項式で近似した。結果を図4に示す。比較のため x の均等分割の8点の y 座標から逆問題の応答曲面を近似した結果を図5に示す。図中実線は $x=\tanh^{-1}(y)$ である。図4, 5から実験計画に基づく応答曲面法によって求めた結果がよい近似を与えていることがわかる。

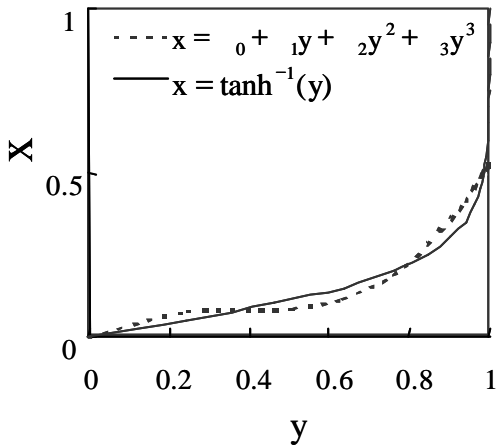


図4 逆問題実験計画を用いた応答曲面による近似逆関数

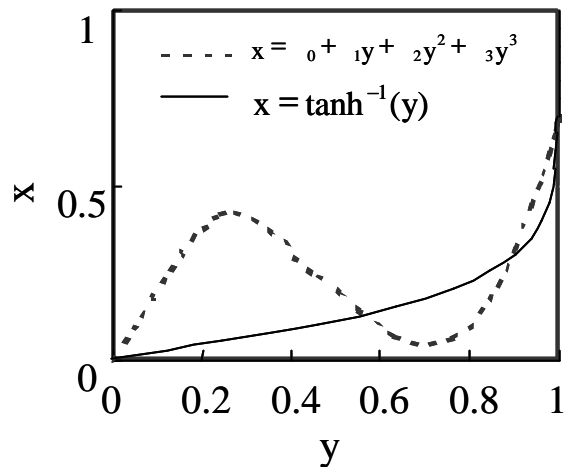


図5 均等8点から応答曲面で求めた近似逆関数

この結果からも明らかなように、順問題で数多くの実験点を取っても、逆問題には不適切な点(平坦な領域)に多くのデータが追加されるだけであり、均等にデータを収集する方法では大量のデータなしでは有効な近似関数を作成することができない場合がある。これに対して、均等に取ったデータからまず順問題(関数 $y=f(x)$)を近似する関数を作成し、その作成した近似関数から逆問題空間を推定して、多くのデータを得て、逆問題にふさわしい実験点を逆問題応答曲面に使用することで、少ない実験点で近似精度が向上する。ここで通常は関数が未知なので順問題を近似しているが、関数形が既知ならば、当然順問題の近似関数は必要ない。また順問題で均等に実験をする必要も無く、多変数の場合には順問題に実験計画を用いればさらに低コストで近似することができる。著者らは電気ポテンシャル法による複合材料のはく離検出の実験的検討において、逆問題に応答曲面法を適用し、成功している^[15]。

誤差逆伝播ニューラルネットワークは基本的に誤差2乗和を非線形関数で最小化しており、最小2乗法と原理は同じである。このため、過剰学習なしで適度な残差をもたせて汎化能力を高めたものは応答曲面とほぼ同じになる場合が多い。学習に必要な計算回数や過剰学習を避けるためのノウハウの取得、ニューラルネットワーク構造の最適化などを考慮すれば、逆問題においても応答曲面の方がはるかに低コストで強力な統計ツールを利用できることがわかる。実験計画を用いることでさらに応答曲面は強力になる。ニューラルネットワークに実験計画を用いることはできない。もしもニューラルネットワークに実験計画を使用して良い結果が得られるのであれば、それはその実験計画に適した多項式で十分近似可能な空間であることを意味している。

7. まとめ

応答曲面法は 1950 年代から登場し、計算機の発達とともに発展してきた。日本においては直交表を用いてばらつきを制御する品質工学分野の田口法 (Taguchi メソッド) が発達し、応答曲面法は浸透していない。Taguchi メソッドは現場向きの強力なツールであり、応答曲面法はどちらかというアメリカの企業所属の統計学者が発展させたものである。近年は直交表を用いる方法を含めて Taguchi メソッドと呼ぶ場合もある。計算機利用が前提の設計分野では表を利用する Taguchi メソッドよりも応答曲面法の方が使いやすいであろう。もちろんこれは個人の好みの問題である。

非線形問題への応答曲面法の利用は問題を十分熟知した上で行う必要がある。例えばある設計変数が指数関数的に応答に影響を与えているにもかかわらず、他のほぼ線形の変数と同じ範囲で実験計画を行っても有効な近似関数が得られないのは当然である。このような場合には変数範囲を狭くするか変数変換をする必要がある。また高次交互作用が無視できない場合なども経験的実験計画では高次交互作用を含む適切な表を探るかまたは D 最適基準などを実施する必要がある。当然ながら高次交互作用を無視した実験計画を用いても適切な近似応答は得られない。多層バックプロパゲーションニューラルネットワークはこのような考慮が不要に思われているが、実際には多くのニューラルネットワーク構築や学習の経験が必要であり、問題であることはわからない。むしろ応答曲面法の方が問題を熟知した経験のある設計者には使いやすい道具であろう。また、筆者のホームページには応答曲面作成ツールと D 最適基準実験計画ツールがアップされており、無料でダウンロードできるようになっている。テキストベースなので使いやすさは無いが、簡単な例題で応答曲面法を体験したい場合に適している。実務上の問題でも、データ入力などの手間をかければ、高額なツールは必要なく、これらの無料ソフトと Excel があれば十分である。ご自由に使用されたい。

応答曲面法やこれを利用した最適設計、逆問題に関する質問、技術的問い合わせは電子メールにて受け付けています。どうぞお気軽にご利用下さい。

参考文献

- [1] 田口玄一 (1976): 第 3 版実験計画法 上・下, 丸善
- [2] Raymond H. Myers and Douglas C. Montgomery (1995) :Response Surface Methodology Process and Product Optimization Using Designed Experiments, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons. Inc.
- [3] Douglas C. Montgomery(1996):Design and Analysis of Experiments 4th edition, John Wiley & Sons. Inc.
- [4] Venkataraman, Haftka, and Johnson,., Proceedings of the 7th AIAA/ USAF/ NASA/ ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Sept. 2-4, 1998, St. Louis, MO.
- [5] Liu, Haftka, Akugum, 轟: 日本機械学会第 8 回設計部門・システム部門講演会講演論文集 ,[98-32] ,261(1998)
- [6] Harrison, Le Riche, Hafkta, AIAA-95-1163(1995)58
- [7] 座古, ほか 3 名, 材料, 45, 12(1996)1316
- [8] 青木, 福島, 邊, 機論, A63(1997)1028
- [9] 福永, 関根, 日本航空宇宙学会誌, 42(1994)371
- [10] 轟, Hafkta, 機論 A, 64-618, (1998)514
- [11] 轟, Haftka, 機論 A, 64-621(1998)1138
- [12] 三木ほか; 機械システム入門シリーズ 複合材料, 共立出版(1997)
- [13] 矢川元基: ニューラルネットワーク 計算力学と CAE シリーズ 12, 培風館(1992)
- [14] 矢川元基, 吉村忍 共編: 計算力学 V, 材料力学のためのニューロ応用, 養賢堂 (1997)
- [15] 田中, 轟, 島村, 機論, A, 65-640, (1999)ページ未定