

完全流体のポテンシャル流を用いた CFRP の電流解析手法*1

Electric Current Analysis of CFRP Using Perfect Fluid Potential Flow

轟 章*2
Akira TODOROKI

Key Words: Composite Materials, Potential Flow, Analysis, Electric Current, Orthotropic Electric Conductivity

Abstract: The present paper deals with a new analytical method to calculate electric current density between two probes in Carbon Fiber Reinforced Plastic (CFRP). Unidirectional CFRP has strongly orthotropic electric conductance. Even when electric current is applied to a CFRP plates using two probes on a single surface, the electric current density is not uniform in the cross section. The electric current concentrates near the surface where the electric current is applied. Although it is quite important to know the electric current density in the CFRP plate for the analysis of lightning effects, it is very difficult to calculate it using 3-D FEM analyses. In the present study, the orthotropic coordinate is transformed into uniform coordinate. Laplace's equation is solved using a potential theory of perfect fluid. The solved equations using an infinite-body approximation are checked comparing with FEM analyses. As a result, the new analysis method is proved to be efficient for unidirectional CFRP. The limitation of the method is also discussed here.

記号の説明

- σ_x : 繊維方向導電率
- σ_y : 繊維直交方向導電率
- σ_z : 厚さ方向導電率
- σ_ξ : 縮小座標系の繊維方向導電率
- σ_h : 縮小座標系の繊維直交方向導電率
- σ_ζ : 縮小座標系の厚さ方向導電率
- i_x : 元座標系の繊維方向座標電流密度
- i_y : 元座標系の繊維直交方向座標電流密度
- i_z : 元座標系の厚さ方向座標電流密度
- i_ξ : 縮小座標系の繊維方向座標電流密度
- i_η : 縮小座標系の繊維直交方向座標電流密度
- i_ζ : 縮小座標系の厚さ方向座標電流密度
- I : 負荷電流
- A : 断面を通過する電流総和
- n_1 : 方向余弦 (ξ 方向)
- n_2 : 方向余弦 (η 方向)
- n_3 : 方向余弦 (ζ 方向)
- ϕ : 電位ポテンシャル

1. はじめに

近年、炭素繊維強化プラスチック (Carbon Fiber Reinforced Plastic: CFRP) が広く航空機構造に適用されている。Boeing 787 では主翼や胴体に CFRP が適用されており、運行時の雷撃による電気伝導が問題となる。

しかしながら、CFRP は炭素繊維が高い導電性を有する

反面、樹脂は絶縁材料であり、繊維方位と繊維直交方位で著しい導電性異方性を有している¹⁾。繊維方向導電率は炭素繊維の体積含有率に比例して増加するが、繊維直交方向導電率と厚さ方向導電率は炭素繊維の接触に起因している。航空機で多く使用されている繊維の体積含有率 60%程度では、繊維方位と比較して厚さ方位導電率はおよそ 1/100 程度の導電率しか有していない。

航空機構造用の層間はく離防止の高じん性 CFRP は層間に樹脂リッチ層が存在し、層間はく離強度を向上させている。このために通常の CFRP 材料よりもさらに強い導電率の異方性が実測されている²⁾。

このような導電率の強い異方性の材料に雷撃などによって電流が流れる場合、板厚に対して均一な電流分布を仮定する 2 次元解析では妥当な解が得られない可能性がある。

CFRP の航空機構造への落雷に対しては CFRP 構造に銅箔や銅メッシュを設置するなどの対策がとられているが、これらの対雷システムから漏洩して雷撃点から比較的遠方を流れる電流も存在する。この電流は静的な電流解析に近いと推定されるが、強い異方性を考慮した積層板の静的電流解析手法は有限要素解析や差分解析であり、大型構造を板厚方位に細かく分割して解析することは実用的でないが、適切な近似解析手法は提案されていない。

そこで、直交異方性材料に電気が流れる場合の解析解を求め、これを元に積層板の電気伝導の解析へ拡張することを目的とし、最初のステップとして 2 次元および 3 次元の直交異方性材料 (一方向 CFRP) の電流解析手法を完全流体のポテンシャル流解析を用いて検討する。CFRP 板構造の表面 2 点に点電極が存在する際の異方性導電率を考慮した電流密度分布を解析的に導出する方法として、完全流体のポテンシャル流を使用した近似解析手法を提案し、FEM

*1 © 2011 日本航空宇宙学会
平成 22 年 12 月 14 日原稿受付

*2 東京工業大学機械物理工学専攻

結果と比較して有効性を検証する。さらにこの近似解析手法の有効範囲について検討し、直交積層板への適用も試みる。なお、ここで得られた解析手法は雷撃時だけでなく、CFRP 構造の電気抵抗変化を利用した損傷解析にも将来的に利用可能である。

2. 解析手法

2.1 直交異方性材料の導電理論 繊維を一方向に限定した一方向 CFRP は電気的特性も直交異方性材料である。直交異方性材料の導電理論は、直交異方性材の熱伝導と同一であり次式で与えられる³⁾。繊維方向を x 方向、直交方向を y 方向、厚さ方向を z 方向とする直角座標系を考えて、電位差ポテンシャル関数 ϕ を用いて、電流密度 i_x, i_y, i_z は次式で求められる。

$$i_x = -\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad i_y = -\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad i_z = -\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はそれぞれ、一方向 CFRP の繊維方向、繊維直交方向、厚さ方向の導電率である。積層板においては、層間の樹脂リッチ層を含んで全体を均質な厚さ方向導電率で近似する。電流の湧き出しがない状態においては、連続の関係から次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(i_x) + \frac{\partial}{\partial y}(i_y) + \frac{\partial}{\partial z}(i_z) = 0 \quad (2)$$

式(1)を式(2)に代入すると次式が得られる。

$$\sigma_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

式(3)はラプラス方程式ではない。そこで、各座標を縮小・拡大してラプラス方程式に変換する³⁾。ただし、簡単のために、 $x-y$ 座標の2次元問題を取り扱い、変換後の座標系を $\xi-\eta$ 座標として以下で定義する。

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\sigma_x}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\sigma_y}} \quad (4)$$

式(4)の座標変換をすると、式(3)は次式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5)$$

式(5)は等方性のラプラス方程式となっている。

$\xi-\eta$ 空間での電流密度 i_ξ, i_η は方向が $x-y$ 座標と同じであるから、電流密度の定義より次式で導かれる。

$$i_x = \frac{A}{dydz} = \frac{A}{\sqrt{\sigma_y}d\eta dz} = \frac{i_\xi}{\sqrt{\sigma_y}} \quad (6)$$

$$i_y = \frac{A}{dxdz} = \frac{A}{\sqrt{\sigma_x}d\xi dz} = \frac{i_\eta}{\sqrt{\sigma_x}}$$

$$\therefore i_\xi = \sqrt{\sigma_y}i_x = -\sqrt{\sigma_y}\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$$

$$i_\eta = \sqrt{\sigma_x}i_y = -\sqrt{\sigma_x}\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (7)$$

ただし、ここで A は断面を通過する電流の総和とする。

式(5)、(7)から、 $\xi-\eta$ 座標系に変換すると、等方性のラプラス方程式を満足する渦なし完全流体の解と類似していることがわかる。

2.2 無限板中の湧き出し 電流負荷電極を面積のない点と考え、電圧0の接地(グランド)を無限遠方にした異方性導電率を有する無限板の電流解析を考える。

$\xi-\eta$ 空間では、等方性であるから、電流を負荷する点電極を原点とし、 $x-y$ 座標と同じ方向に $\xi-\eta$ 座標を定義する。電流は原点から無限遠方に均一に発散していく流れとなるのが容易に想像できる。

これは渦なし完全流体の湧き出しの問題と同じであり(完全流体では式(7)の係数が1)、渦なし完全流体の湧き出しの速度ポテンシャル関数をそのまま用いることができる。ただし、流量に関する部分が式(7)のように完全流体のポテンシャル流れと異なるので、検討が必要となる。渦なし完全流体の湧き出しの速度ポテンシャルは、湧き出しの強さを q とすると次式で表される⁴⁾。

$$\phi = q \log r \quad (8)$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (9)$$

ただし、ここでは $r-\theta$ の極座標表示を用いる。回転角度 θ は ξ 座標軸からの反時計回りを正とする回転角度である。

式(7)および式(8)から、電流密度 i_ξ, i_η が求められる。

$$i_\xi = -\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} = -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \frac{\xi}{r^2} \quad (10)$$

$$i_\eta = -\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} = -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \frac{\eta}{r^2}$$

単位厚さ当たりの電流を I [A/m] とすると、原点から出る電流の総和は I であるから、次式が成立する。

$$I = \int_0^{2\pi} i_r r d\theta \quad (11)$$

ここで、 i_r は半径方向(角度 θ 方位)の電流密度である。角度 θ 傾いた面の電流密度 i_r は次式で求められる。

$$i_r = i_\xi \cos \theta + i_\eta \sin \theta \quad (12)$$

式(10)、(12)を式(11)に代入すると、電流密度の正負の符号を入れ替えていることから次式が得られる。

$$\begin{aligned} I &= -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\xi}{r^2} \cos \theta + \frac{\eta}{r^2} \sin \theta \right) r d\theta \\ &= -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \quad (13) \\ &= -2\pi q\sqrt{\sigma_x\sigma_y} \end{aligned}$$

$$\therefore q = -\frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \quad (14)$$

以上から、電流密度 i_x, i_y は次式で求められる。

$$i_x = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \frac{x}{\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y}} \quad (15)$$

$$i_y = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \frac{y}{\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y}}$$

無限板に湧き出し（電流負荷点）と吸い込み（電圧0の接地点）がある場合、式(15)の解の重ね合わせで電流が求められる。吸い込みは単に逆符号となるだけである。これは2点の電極間を流れる電流となる。湧き出し（電流負荷点）座標を $(-a, 0)$ 、吸い込み（接地点）座標を $(a, 0)$ とすると次式で表される ($a > 0$)。

$$i_x = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \left\{ \frac{x+a}{\frac{(x+a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y}} - \frac{x-a}{\frac{(x-a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y}} \right\}$$

$$i_y = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \left\{ \frac{y}{\frac{(x+a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y}} - \frac{y}{\frac{(x-a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y}} \right\} \quad (16)$$

半無限板の表面に湧き出し（電流 I ）と吸い込み（電圧0）がある場合、式(16)の無限板の解の半分の流量が半無限板に流れることから、式(16)の電流 I の代わりに $2I$ とすれば半無限板に I を負荷する場合の電流密度が求められる。

2.3 無限体中の湧き出し 無限板中に湧き出し（電流負荷点）が1つある2次元の場合と同様に、 $\xi-\eta-\zeta$ 空間の3次元等方性空間の無限体中に湧き出し（電流負荷点）が1つある場合（無限遠方が電圧0）は3次元板の電流解析に有益な問題である。この場合も渦なし完全流体の湧き出しの速度ポテンシャルを用いることができる。3次元無限体に1つ湧き出し（強さ q ）がある場合の速度ポテンシャルは次式で与えられる⁴⁾。

$$\phi = -\frac{q}{r} \quad (17)$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad (18)$$

2次元の場合と全く同様に等方性空間への変換を行う。

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\sigma_x}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\sigma_y}}, \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt{\sigma_z}} \quad (19)$$

式(10)と同様にして、 ξ, η, ζ の電流密度が得られる。

$$i_\xi = -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \frac{\xi}{r^3}$$

$$i_\eta = -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \frac{\eta}{r^3} \quad (20)$$

$$i_\zeta = -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \frac{\zeta}{r^3}$$

湧き出し点（電流負荷点）を原点として、3次元の極座

標 z ($r-\theta-\varphi$ 座標系) を定義する。 θ が $\xi-\eta$ 面内の角度であり、 φ が $\xi-\eta$ 面からの角度である。 r 方向の面の ξ, η, ζ 軸方向余弦を (n_1, n_2, n_3) とすると r 方向の電流密度 i_r は次式で表される。

$$i_r = i_\xi n_1 + i_\eta n_2 + i_\zeta n_3 \quad (21)$$

式(13)と同様に、等方性3次元空間においても、電流密度を積分した値は電流 I であるから次式が得られる。

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i_r r \cos\theta d\theta r d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i_\xi n_1 + i_\eta n_2 + i_\zeta n_3) r^2 \cos\theta d\theta d\varphi$$

$$= -q\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \cos\theta d\theta d\varphi$$

$$= -4\pi q\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \quad (22)$$

$$\therefore q = -\frac{I}{4\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \quad (23)$$

以上から、電流密度 i_x, i_y, i_z は次式で求められる。

$$i_x = \frac{I}{4\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{x}{\left(\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}}$$

$$i_y = \frac{I}{4\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{y}{\left(\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} \quad (24)$$

$$i_z = \frac{I}{4\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{z}{\left(\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}}$$

2.4 半無限体中の湧き出しと吸い込み 式(24)を用いて、 $x-y-z$ 空間に存在する無限体の座標 $(-a, 0, 0)$ に湧き出し（電流負荷点）が存在し、座標 $(a, 0, 0)$ に吸い込み（電圧0点）が存在する場合の電流密度が求められる。3次元空間では、表面の存在しない無限体よりも半無限体 (z の正領域のみ) の解が有益である。そこで、2次元と同様に I を $2I$ として、半無限体の電流密度を計算すると、次式で与えられる。

$$i_x = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \left\{ \frac{(x+a)}{\left(\frac{(x+a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} - \frac{(x-a)}{\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} \right\}$$

$$i_y = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \left\{ \frac{y}{\left(\frac{(x+a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} - \frac{y}{\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} \right\}$$

$$i_z = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \left\{ \frac{z}{\left(\frac{(x+a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} - \frac{z}{\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}\right)^{3/2}} \right\} \quad (25)$$

これは 2 点間を流れる一方向 CFRP の電流密度の無限板近似の解析解となる。

2.5 有限板への適用 以上得られた電流密度の式はすべて無限または半無限である。現実の航空機構造は薄板構造であり、有限厚さの板となる。完全流体のポテンシャル流では、通常は鏡像を設置して有限厚さの板の解を得ることが可能である。

CFRP 複合材料では厚さ方向に導電性が極めて低い。このため、航空機構造で多用される数 mm～十数 mm の厚さの CFRP 板材では、電流は表面層近傍の繊維方位だけに流れ、繊維直交方向や厚さ方向にはほとんど広がらないことが知られている⁵⁾。このため、ここで導出した半無限板や半無限体の電流密度が鏡像解を追加する修正なしで有限板厚の CFRP の電流密度分布解析に適用可能であると想像される。次節でこれを有限要素法の解析結果と比較して検討する。

2.6 積層板への適用 複合材料は通常は繊維をさまざまな方位に積層して作成する。アングルプライを含む一般的な多方向強化積層板に流れる電流密度分布の解析では、 z 座標に依存してラプラス方程式で記述できない部分が生じるため、本論文で提案した解析手法を適用することは現状では非常に困難である。ここでは、 0° と 90° だけの直交積層板での近似解析を提案する。

電流は導電率の大きい方向に流れやすいので、表面層を 0° 層とし、表面層繊維方向に流れる場合を考える。簡単のため、積層 (x - y) 面内 1 軸、厚さ方向 1 軸の 2 次元問題 (積層板の断面問題) を取り扱う。2 次元問題では、式 (4) と同様の変換を実施するが、積層厚さ方向の分布を求めるために x - z 方位とする。

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\sigma_x}}, \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt{\sigma_z}} \quad (26)$$

ただし、 x 方位の導電率 σ_x が、厚さ方向の座標 z に依存して変化する。こうすることで、式 (5) と同様のラプラス

方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (27)$$

上記は全く式 (5) と同じであるので、ポテンシャル ϕ は同様に湧き出しがある式 (8) の完全流体のポテンシャルが利用できる。式 (10) の ξ 方位の電流密度はそのまま同じになるが、 ζ 方向の電流密度は ξ の変換に使用する σ_x が厚さ方向の座標 z (ζ) に依存するため、容易には計算できない。このために積層板の電流密度の解析解は得られない。

x 方向の電流密度 i_x はポテンシャル関数 ϕ を ξ で偏微分すれば得られる。この解は式 (10) と同じだが、 q や σ_x が z に依存しているために厳密な解析解を得ることはできない。

z 方向は同一の導電率であるから、 ϕ を ξ で偏微分した電場の関数形は単層でも積層でも同一と仮定すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{I}{\pi\sigma_x^{3/2}\sqrt{\sigma_y}} \frac{x}{\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{z^2}{\sigma_z}} \quad (28)$$

電流密度の主な差異の原因は各層の導電率の差異に起因すると考えると、半無限板湧き出し ($x=0$) の場合の電場の近似解が得られる。

0° 層における電流密度 i_x は式 (28) に繊維方向の導電率をかけることで求められる。 90° 層の電流密度は繊維直交方向の導電率を式 (28) にかけることで求められる。

3. 有限厚さの FEM 解析との比較検討

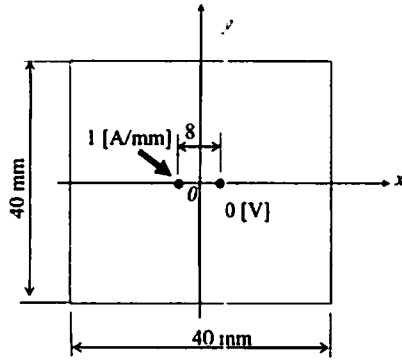
先に述べたように、板厚が有限な場合の CFRP 一方向材の電流密度分布を有限要素法で解析し、本研究で得た無限板、無限体の解析式の適用可能性を検討する。

ここでは 4 通りのモデルで検討を行う。はじめに、2 次元問題として、十分に広い CFRP 平板の面内に電流負荷点と電圧 0 点が設置され、2 点間を電流が流れる場合を取り扱う (モデル A)。これは、導電率の異方性によって変化する電流密度分布を把握するためである。

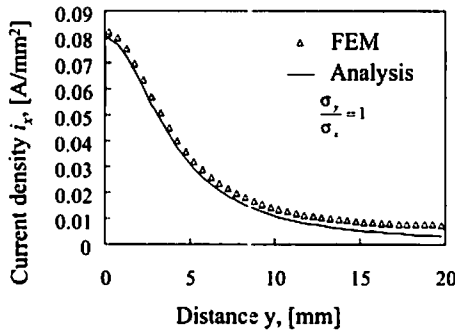
次に厚さの異なる板で 2 次元問題として板厚の影響を調査し、無限板近似の適用可能範囲を検討する (モデル B)。

さらに 3 次元の板材表面に電流負荷点と電圧 0 点を設置した場合を対象として、解析手法の有効性を検証する (モデル C)。そして、2 次元の直交積層板の電流密度解析を検討する (モデル D)。なおここでは有限要素法には市販の ANSYS Ver. 11 を用いた。

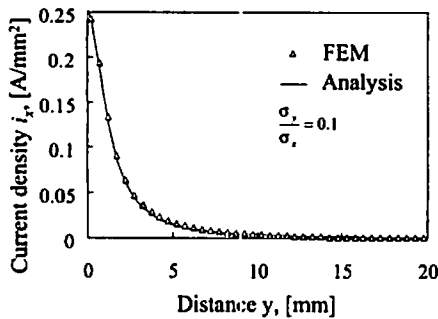
3.1 2 次元正方形板の電流密度分布解析 第 1 図に示すような 40 mm の正方形板 (厚さ 1 mm) の x 軸上に間隔 8 mm で電流負荷点と電圧 0 の点がある場合を解析する。導電率 σ_x と σ_y の比 (σ_y/σ_x) は、1, 0.1, 0.01 の 3 通りとした。有限要素法 (FEM) 解析には、最小要素寸法を 0.5 mm とし、6561 節点、6400 要素の 2 次元解析を実施した。電流は第 1 図に示す左の負荷点座標 (-4, 0) に 1 [A/mm] を負荷し、右の座標点 (4, 0) は 0 [V] とした。



第1図 2次元正方形板の電流解析問題 (モデル A)



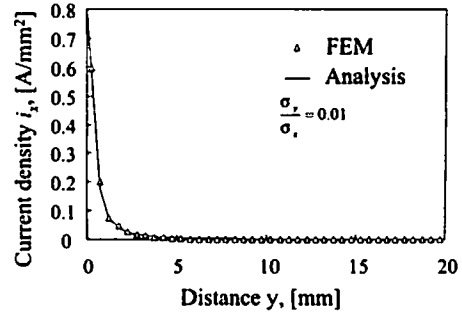
第2図 2次元正方形板の電流解析結果比較 (モデル A) (i_x の $x = 0$ における分布, $\sigma_y/\sigma_x = 1$)



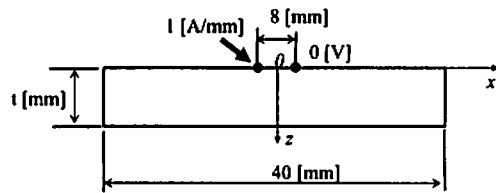
第3図 2次元正方形板の電流解析結果比較 (モデル A) (i_x の $x = 0$ における分布, $\sigma_y/\sigma_x = 0.1$)

第2図に等方性材料 ($\sigma_y/\sigma_x = 1$) における電流密度 i_x の解析結果と FEM 結果を比較して示す。図中 Δ 印が FEM 解析結果であり、実線が無限板の解析結果である。この結果からわかるように、8 mm の電流負荷点-電圧 0 点間隔に比較して十分大きな (40 mm) 平板においても、等方性材料 ($\sigma_y/\sigma_x = 1$) では無限板近似解は誤差が大きい。

第3図に弱い異方性 ($\sigma_y/\sigma_x = 0.1$) の場合の電流密度 i_x の解析結果と FEM 結果を比較して示す。図中 Δ 印が FEM 解析結果であり、実線が無限板の解析結果である。等方性材料の場合と異なり、異方性材料では無限板近似解析結果が FEM 結果と一致している。これは、異方性のために $y = 15$ mm 程度で電流密度がほぼ 0 となり、無限板の境界条件とほぼ同一であることに起因している。このことから、弱い異方性においても無限板近似が有効であること



第4図 2次元正方形板の電流解析結果比較 (モデル A) (i_x の $x = 0$ における分布, $\sigma_y/\sigma_x = 0.01$)



第5図 2次元梁状試験片の電流解析問題 (モデル B)

が実証された。

第4図に強い異方性 ($\sigma_y/\sigma_x = 0.01$) の場合の電流密度 i_x の解析結果と FEM 結果を比較して示す。図中 Δ 印が FEM 解析結果であり、実線が無限板の解析結果である。異方性が強い場合、 $y = 5$ mm 程度で電流密度はほぼ 0 になっており、無限板近似が適用可能であることがわかる。

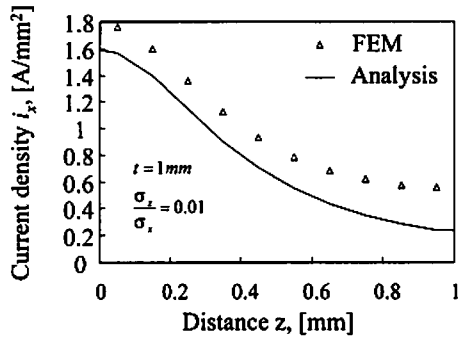
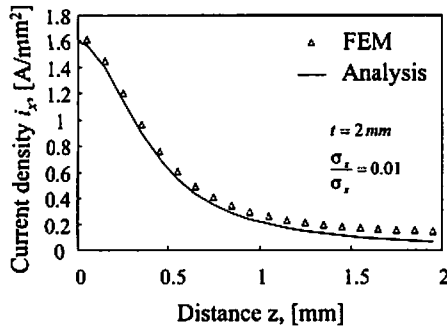
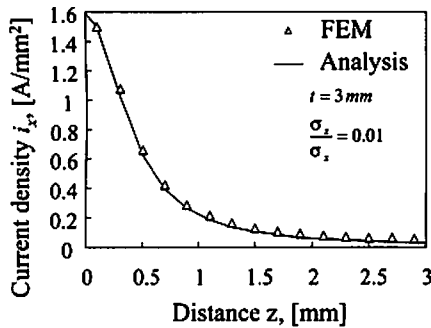
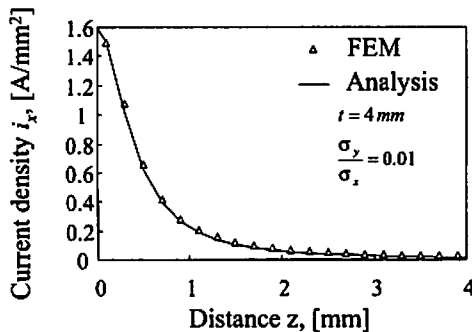
3.2 2次元薄板の電流密度分布解析 板厚が薄い場合の板厚方向分布の近似精度について調査するために、第5図に示すような長さ 40 mm の薄板の表面に間隔 8 mm で電流負荷点と電圧 0 点を設置した場合の FEM 結果と無限板 2次元解析結果を比較検討する。板厚 t は 1 mm, 2 mm, 3 mm, 4 mm の 4 通りとした。板厚 1 mm と 2 mm では要素寸法が 0.1 mm の正方形となるようにした。3 mm と 4 mm では 0.2 mm の正方形となるようにした $t = 1$ mm の場合、節点数は 4411, 要素数は 4000 である。 $t = 2$ mm の場合、節点数 8421, 要素数 8000 である。 $t = 3$ mm の場合、節点数 3216, 要素数 3000 である。 $t = 4$ mm では節点数 4221, 要素数 4000 である。なお、ここでは $\sigma_x = 1$ [A/mm²] とする。

等方性材料 ($\sigma_z/\sigma_x = 1$) の場合、 $x = 0$ における i_x の z 分布 (板厚方向分布) は均一となり、無限板近似解析は FEM の結果と全く異なる。

ここでは、文献 1) に示されているような一般的な CFRP の導電率異方性として $\sigma_z/\sigma_x = 0.01$ を取り上げる。比較はすべて $x = 0$ の線上で x 方向の電流密度 i_x を比較する。

第6図に $t = 1$ mm の場合の結果を示す。図中 Δ 印が FEM 結果であり、実線が無限板近似の結果である。図からわかるように、 $t = 1$ mm では FEM 結果と無限板近似は一致していない。

第7図および第8図にそれぞれ $t = 2$ mm, $t = 3$ mm の結果を示す。第7図の $t = 2$ mm の場合にはまだ誤差が

第6図 梁試験片の電流密度比較 ($t = 1 \text{ mm}$) (モデル B)第7図 梁試験片の電流密度比較 ($t = 2 \text{ mm}$) (モデル B)第8図 梁試験片の電流密度比較 ($t = 3 \text{ mm}$) (モデル B)第9図 梁試験片の電流密度比較 ($t = 4 \text{ mm}$) (モデル B)

大きい、 $t = 3 \text{ mm}$ ではほぼ一致していることがわかる。板厚 t が電極間隔 (電流負荷点-電圧 0 点間隔) の半分の長さ a と等しい場合の結果を第 9 図に示す。第 9 図においては、 z が大きい領域においてもほぼ一致している。

この無限板近似が成立する板厚寸法は電極間隔 $2a$ に依

存するためにここで得られた結果をそのまま一般化はできない。しかし、無限板の解析解は電極間隔が大きくなってそのまま相似的に拡大されるだけであるので有限板の結果を近似的に示すための判定が容易にできる。式 (16) において、 $I = 2I$ として y の代わりに z を用いた結果が梁試験片の半無限板の結果である。ここで、 z 方向へ流れが最も広がる $x = 0$ の地点を考えると、電流密度 i_x は次式となる。

$$i_x = \frac{2Ia\lambda}{\pi(z^2 + (a\lambda)^2)} \quad (29)$$

ただし、ここで、 λ を次式で定義する。

$$\lambda = \sqrt{\sigma_z/\sigma_x} \quad (30)$$

式 (29) を z について積分した値を半無限板中を通過する電流 I で割った値 δ が、負荷電流と断面 $x = 0$ を通過する電流との比となる。

$$\delta = \int i_x dz = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{z}{a\lambda} \right) \quad (31)$$

式 (31) の δ として、 $z = 0$ から $z = t$ まで積分した値 δ_t は次式となる。

$$\delta_t = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{t}{a\lambda} \right) \quad (32)$$

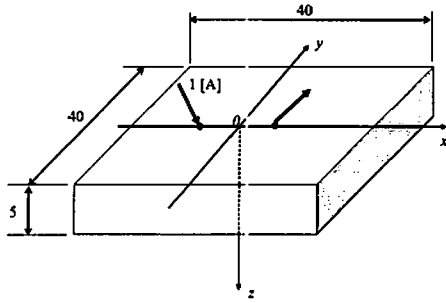
式 (31) を $z = 0$ から $z = \infty$ まで積分した値は 1 であるから、1 と比較した差異が誤差の総和となっている。 $\lambda = 0.1$ の場合、板厚が 2 mm の場合には $\delta = 0.87$ 、板厚が 3 mm の場合には $\delta = 0.91$ となっていることから、式 (32) の δ が 0.9 を超えれば実用上は無限板近似解で近似可能であることが推察される。簡単に考えると、 $z = t$ において十分な精度であるから、無限板近似が可能な条件として次式が得られる。

$$\frac{t}{a\lambda} \geq 6.3 \quad (33)$$

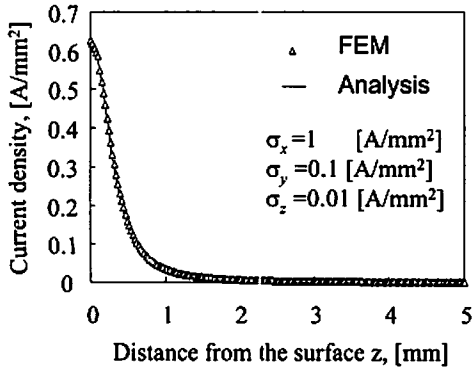
3.3 3次元板の電流密度分布解析 第10図に示すような $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ の有限幅で厚さ 5 mm の板の表面に電極が設置されている場合を考える (モデル C)。ここで、電極は x 軸上に間隔 8 mm で設置されている。解析に用いた導電性は $\sigma_x = 1 [\text{A}/\text{mm}^2]$ 、 $\sigma_y = 0.1 [\text{A}/\text{mm}^2]$ 、 $\sigma_z = 0.01 [\text{A}/\text{mm}^2]$ とする。これらの値は現実の CFRP とは異なるが、計算には比だけが重要であるので簡単のためにこの値を用いた。

第11図に i_x の $x = 0, y = 0$ の深さ分布を示す。図中、横軸は表面からの距離 (z 座標) であり、縦軸が x 方向の電流密度の大きさである。 Δ 印は FEM 結果であり実線が無限体解析結果である。この結果から、3次元問題においても無限体解析が良い近似を与えていることがわかる。

文献2) から、高じん性 CFRP 構造では、層間はく離防止のために層間に樹脂リッチ層があり、式 (30) の λ の値が 10^4 オーダーになっている。CFRP 構造の板厚が 10 mm 程度とすると、式 (33) から $2a = 0.3 \text{ m}$ 程度まで電極間距離があっても無限板近似で解析可能であると判断される。ま



第 10 図 3次元平板の電流解析問題 (モデル C)



第 11 図 平板の電流密度解析結果比較 ($i_x, x=0, y=0$) (モデル C)

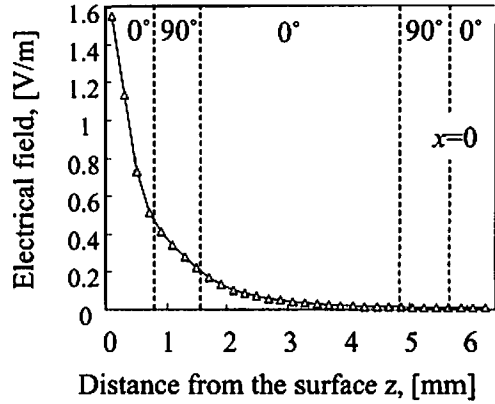
た、近似精度が第 7 図の程度で十分であれば、2 電極間距離が 0.4 m 程度まで本研究で得られた無限板近似解析が可能である。実際には 1m 程度の距離でリベットなどが存在し、内部へ電流が流れるために、別途解析が必要であるので、翼構造や胴体などの 1 ブロック程度の大きさの電流解析には、本研究で示した無限板近似で近似的に十分な精度が得られると判断できる。

3.4 直交積層板の 2 次元解析 ここでは、直交積層板で第 5 図と同様の 2 次元問題 (直交積層板の断面) を取り扱う (モデル D)。板厚は 6.4 mm とし、表面層が厚さ 0.8 mm の 0° 層 (繊維方位が x 軸方向)、第 2 層が厚さ 0.8 mm の 90° 層 (繊維方向が y 軸方向)、第 3 層が厚さ 3.2 mm の 0° 層、第 4 層が厚さ 0.8 mm の 90° 層、第 5 層が厚さ 0.8 mm の 0° 層である。節点数が 6633、要素数が 6400 である。要素 1 辺の大きさは 0.2 mm である。

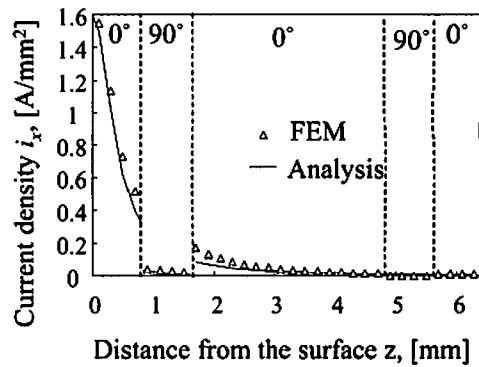
第 12 図に電場の FEM 解析結果を示す。縦軸は電場、横軸は表面からの距離である。図からわかるように、第 9 図などの一方向単層 CFRP の電流密度分布と類似しており、積層板で電場の関数形状に関する 2.6 節で用いた仮定が近似的に成立していることがわかる。ただし、第 2 層の 90° 層では 0° 層内と異なり、直線的に減少している。

そこで、表面層の 0° 層単層として解析し、電場を得た後に各層の導電率をかけて電流密度を解析した。結果を第 13 図に示す。

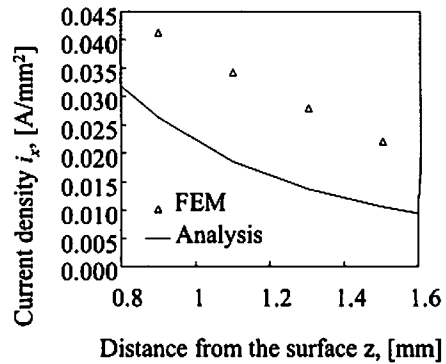
第 13 図において、縦軸は $x=0$ における x 方向電流密度であり、横軸は表面からの厚さ方向深さである。この図から概略形状は近似できていることがわかるが、解析結果



第 12 図 電場の FEM 解析結果 (モデル D)



第 13 図 直交積層板の i_x 分布の近似解析と FEM 結果 (モデル D)



第 14 図 第 2 層目 90° 層の i_x 解析結果と FEM 結果 (モデル D)

は実験結果よりも小さくなっている。 90° 層部分だけを拡大して第 14 図に示す。

この図から、 90° 層の電流密度は FEM 結果の約半分の結果となっている。この解析手法では、積層板内の電流密度分布の概略形状は与えるが、厳密解とは異なる結果となっていると判断される。これは、電場分布が 0° 層と異なり、 90° 層では直線的であるためと考えられる。積層板への適用の詳細な検討は今後の課題である。

今後はこの知見を用いて、繊維方向が異なる層を多層積層したさまざまな積層板構造の場合に拡張していく予定である。繊維配向角度が 0° と 90° 以外では、支配方程式がラプラス方程式に従わない積層部分が生じるため、本研究の手法は直接適用することはできない。新しい積層理論が必

要となる。これは今後の課題である。

4. 結 論

導電率異方性が強い CFRP の電流解析に際して、等方性に変換して無限板近似を行った完全流体のポテンシャル流解析手法を用いて電流密度を求め、FEM 解析結果と比較検討した。得られた結果を要約すると以下の通りである。

(1) 異方性の導電率を等方性に変換して無限板完全流体のポテンシャルから電流密度解を求めた。

(2) FEM 解析結果との比較から、得られた無限板近似解が異方性の強い一方向 CFRP の電流密度解析に有効であることを示した。

(3) 無限板近似解の有効範囲について考察し、有効限界の指針を得た。

(4) 直交積層板に適用可能な近似解析手法を提案し、そ

の有効性を確認した。電流密度の分布形状は近似的に良い結果を与えるが、精度的には十分ではない。

参 考 文 献

- 1) Todoroki, A., Tanaka, M. and Shimamura, Y.: Measurement of Orthotropic Electric Conductance of CFRP Laminates and Analysis of the Effect on Delamination Monitoring with Electric Resistance Change Method, *Compos. Sci. Tech.*, **62** (2002), pp. 619-628.
- 2) 平野義鎮, 勝保慎吾, 岩堀 豊, 藤 章: 模擬雷撃を加えた CFRP 積層板の損傷挙動, *日本複合材料学会誌*, **35** (2009), pp. 165-174.
- 3) Özisik, M. N.: *Heat Conduction*, 2nd ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- 4) 今井 功: *流体力学 (前編)*, 裳華房, 東京, 1973, pp. 116-157.
- 5) Todoroki, A., Ueda, M. and Shimamura, Y.: Damage Monitoring of Thick CFRP Beam Using Electrical Impedance Changes, *Key Engineering Materials*, **353-358** (2007), pp. 1298-1301.