内圧を受ける厚肉円筒

１．圧力容器（内圧円筒、球）（図１参照）

両端閉じ：鏡板付圧力容器、缶ビール、コーラのビン、風船

両端開き：ピストン付シリンダー、配管、水道のホース

２．薄肉円筒と厚肉円筒

(1) 薄肉円筒（図２参照）

内半径a、外半径b、厚さt=b-a、圧力-p

薄肉の定義

$$a \fallingdotseq b, \quad t \ll a$$

θ方向応力 σ_θ（断面に等分布と仮定）

$$p \times 2a = \sigma_\theta \times t \times 2$$

$$\sigma_\theta = \frac{pa}{t}$$

z方向応力 σ_z（断面に等分布と仮定）

両端閉じ

$$p \times \pi a^2 = \int_a^b \sigma_z 2\pi r dr \fallingdotseq \sigma_z \times 2\pi a \times t$$

$$\sigma_z = \frac{pa}{2t} = \frac{\sigma_\theta}{2}$$

両端開き

$$\sigma_z = 0$$

r方向応力 σ_r

内面では$\sigma_r=-p$、外面では$\sigma_r=0$（a≒bとすれば矛盾）

(2) 厚肉円筒

応力σ_r、σ_θは断面で応力勾配をもって変化

３．内圧を受ける厚肉円筒

(1) 軸対称問題（r, θ座標）（図３参照）

任意半径 r、任意角度θ、内半径a、外半径b、圧力-p

応力σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$は角度θに無関係

応力関数ϕはrのみの関数

$$\phi \equiv \phi(r)$$

(2) 重調和方程式の解

重調和方程式

$$\nabla^2\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right)$$

$$= \frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr}$$

$$= 0$$

解

$$\phi = r^n$$

代入して、nの値を定める。

$n = 0$（二重根）、$n = 2$（二重根）

二重根のときは、以下の解が加わる（$\ln r \equiv \log_e r$）

$$\phi = r^n \ln r$$

一般解

$$\phi = A\ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$$

(3) 応力

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1+2\ \ln r) + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B\ (3+2\ \ln r) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

(4) 境界条件

$b \to \infty$ ($r \to \infty$) で応力有限	$B = 0$
$r = a$ で $\sigma_r = -p$	$A/a^2 + 2C = -p$
$r = b$ で $\sigma_r = 0$	$A/b^2 + 2C = 0$

$$\therefore \quad A = -p\frac{a^2}{1-(a/b)^2}, \quad 2C = p\frac{(a/b)^2}{1-(a/b)^2}$$

(5) Laméの式

$$\sigma_r = p\frac{1-(b/r)^2}{(b/a)^2-1}$$

$$\sigma_\theta = p\frac{1+(b/r)^2}{(b/a)^2-1}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

両端閉じ

$$\sigma_z = p\frac{1}{(b/a)^2-1}$$

両端開き

$$\sigma_z = 0$$

注意事項

①σ_rは必ず－、σ_θとσ_zは必ず＋である。

②相似形状（b/a=一定）ならば、応力分布は寸法(a)と無関係に定まる。

(6) 引張応力 σ_θ

最大引張応力 $\sigma_{\theta,max}$ (r=a)

$$\sigma_{\theta,max} = p\frac{1+(b/a)^2}{(b/a)^2-1}$$

最小引張応力 $\sigma_{\theta,min}$ (r=b)

$$\sigma_{\theta,min} = p\frac{2}{(b/a)^2-1}$$

相似形状（b/a=一定）ならば、$\sigma_{\theta,max}/p$、$\sigma_{\theta,min}/p$は寸法(a)と無関係に定まる。

b/a	1.5	3	5	∞
$\sigma_{\theta,max}/p$	2.6	1.25	1.08	1
$\sigma_{\theta,min}/p$	1.6	0.25	0.08	0

厚肉にすればσ_θを低減できるが、b/a=3までが効果的で、b/a>3では効果なし。

(7) 厚肉円筒と薄肉円筒の式の整合

薄肉円筒の式

$$\sigma_\theta = p\frac{a}{t} \quad \text{(1)}$$

$$\sigma_\theta = p\frac{a+t}{t} \quad \text{(2)}$$

		b/a, (a+t)/a					
		1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
σ_θ /p 厚肉	max.	∞	10.5	5.5	3.9	3.1	2.6
	min.	∞	9.5	4.5	2.9	2.1	1.6
σ_θ /p 薄肉	式 (1)	∞	10.0	5.0	3.3	2.5	2.0
	式 (2)	∞	11.0	6.0	4.3	3.5	3.0
	式 (5)	∞	10.6	5.6	3.9	3.1	2.6

厚肉円筒の式の適用範囲

$b/a > 1.5 \quad (t/a > 0.5)$

薄肉円筒の修正式　$(t/a \leqq 0.5)$

薄肉円筒

$$\sigma_\theta = p\frac{a+\beta t}{t} \quad \text{(3)}$$

厚肉円筒

$$\sigma_{\theta,max} = p\frac{1+(b/a)^2}{(b/a)^2-1} \quad \text{(4)}$$

t/a=0.5で式(3)と式(4)を等置

$\beta = 0.6$

$$\therefore \sigma_\theta = p\frac{a+0.6t}{t} \quad \text{(5)}$$

4. 外圧を受ける厚肉円筒

(1)～(3)は内圧の場合と同じ。

(4) 境界条件

$b \to \infty \ (r \to \infty)$ で応力有限 　　　$B = 0$

$r = a$ で $\sigma_r = 0$ 　　　$A/a^2 + 2C = 0$

$r = b$ で $\sigma_r = -p$ 　　　$A/b^2 + 2C = -p$

$$\therefore \ A = p \frac{a^2}{1 - (a/b)^2}, \quad 2C = -p \frac{1}{1 - (a/b)^2}$$

(5) Lamé の式

$$\sigma_r = -p \frac{1 - (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

$$\sigma_\theta = -p \frac{1 + (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

両端閉じ

$$\sigma_z = -p \frac{1}{1 - (a/b)^2}$$

両端開き

$$\sigma_z = 0$$

5. 演習問題へ向けての準備

内圧 -pを受ける厚肉円筒

$$\sigma_r = p \frac{1 - (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1}$$

$$\sigma_\theta = p \frac{1 + (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1}$$

内圧 +pを受ける厚肉円筒

$$\sigma_r = -p \frac{1 - (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1}$$

$$\sigma_\theta = -p \frac{1 + (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1}$$

外圧 -pを受ける厚肉円筒

$$\sigma_r = -p \frac{1 - (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

$$\sigma_\theta = -p \frac{1 + (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

外圧　+pを受ける厚肉円筒

$$\sigma_r = p\frac{1-(a/r)^2}{1-(a/b)^2}$$

$$\sigma_\theta = p\frac{1+(a/r)^2}{1-(a/b)^2}$$

演習問題

(1) 内圧 $-p_1$と外圧 $-p_2$を同時に受ける厚肉円筒のσ_r、σ_θを求めよ（航空機、潜水艦）。

(2) 上記(1)で$p_1=p_2=p$の場合を調べよ（静水圧）。

(3) 大きい円筒（内径b'、外径c）と小さい円筒（内径a、外径b）を用意する。bはb'よりもわずかに大きい。大きい円筒を加熱して内径を拡げ、そこに小さい円筒をはめ込み冷却する。これを焼ばめという。得られた円筒が組合せ円筒である。冷却後に両円筒の境界に焼ばめ圧力p_0が生ずる。焼ばめで生ずる残留応力σ_θの分布を求めよ（計算上はb=b'とみなせ）。

(4) 上記(3)の組合せ円筒が内圧 -pを受ける場合、応力σ_θの分布を求め、一体円筒と比較して、その有効さを論ぜよ。

内圧円筒（厚肉）

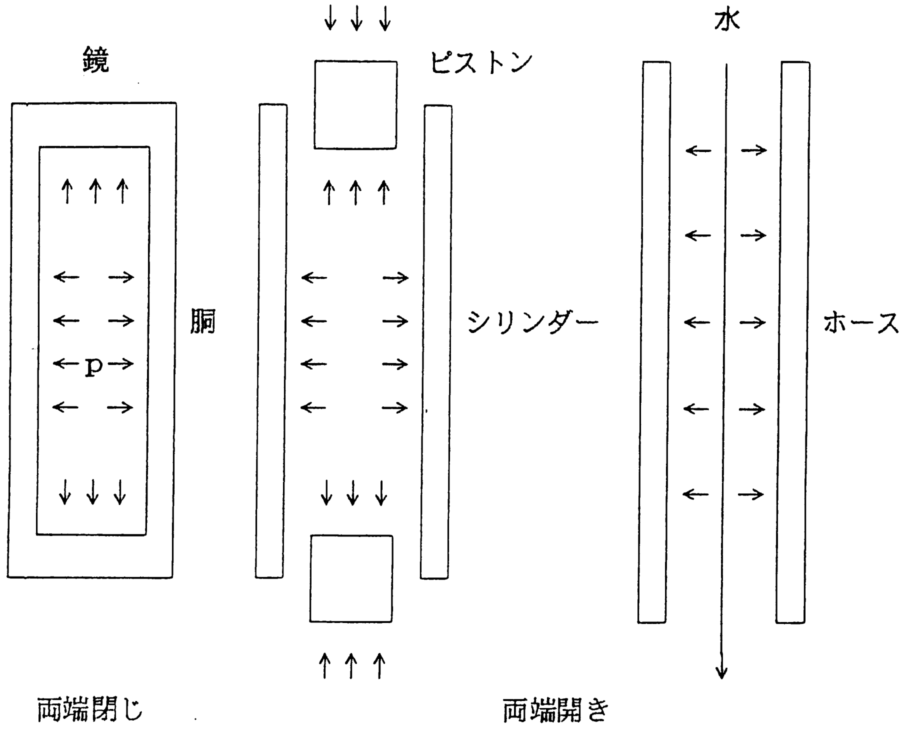

図1

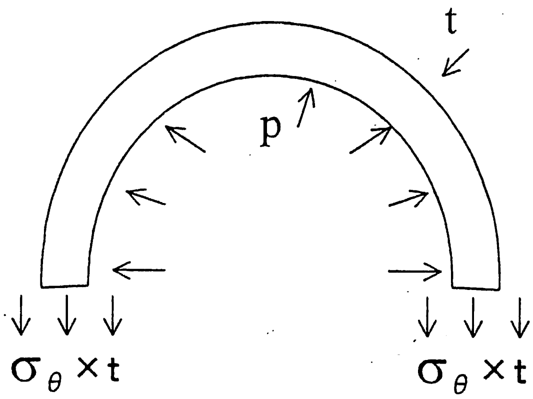

図2

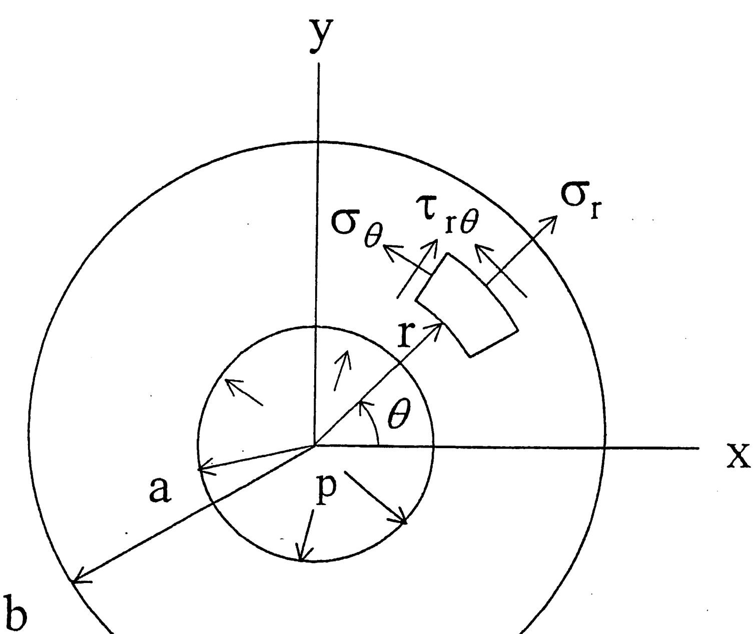

図3

解　答

(1)

$$\sigma_r = p_1 \frac{1 - (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1} - p_2 \frac{1 - (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

$$\sigma_\theta = p_1 \frac{1 + (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1} - p_2 \frac{1 + (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

(2)

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p$$

（両端閉じの場合、$\sigma_z = -p$）

(3) 大きい円筒（内圧 $-p_0$を受ける厚肉円筒）

$$\sigma_\theta = p_0 \frac{1 + (c/r)^2}{(c/b)^2 - 1}$$

小さい円筒（外圧 $-p_0$を受ける厚肉円筒）

$$\sigma_\theta = -p_0 \frac{1 + (a/r)^2}{1 - (a/b)^2}$$

(4) 内圧 $-p$を受ける一体厚肉円筒（内半径 a、外半径 c）

$$\sigma_\theta = p \frac{1 + (c/r)^2}{(c/a)^2 - 1}$$

大きい円筒の合成応力

$$\sigma_\theta = p_0 \frac{1 + (c/r)^2}{(c/b)^2 - 1} + p \frac{1 + (c/r)^2}{(c/a)^2 - 1}$$

小さい円筒の合成応力

$$\sigma_\theta = -p_0 \frac{1 + (a/r)^2}{1 - (a/b)^2} + p \frac{1 + (c/r)^2}{(c/a)^2 - 1}$$