

フラクタル分枝限定法による複合材料積層平板の  
曲げ-ねじりカップリングの最適設計

寺田雄一郎，轟 章

## 研究論文

フラクタル分枝限定法による複合材料積層平板の  
曲げ-ねじりカップリングの最適設計寺田雄一郎\*<sup>1</sup>, 轟 章\*<sup>2</sup>

(2000年11月15日受付)

Stacking Sequence Optimizations of Bending-Twisting Coupling of  
Composite Panel Using Fractal-Branch and Bound MethodYuichiro TERADA\*<sup>1</sup> and Akira TODOROKI\*<sup>2</sup>

(Received November 15, 2000)

Stacking sequence optimization is an important problem in a design of composite panel. Practical composite laminates comprise a small set of available fiber orientations such as  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  and  $-45^\circ$  plies because of the fabrication process and/or lack of experimental data. The restriction of available fiber orientations makes the stacking sequence optimizations into combinatorial optimization problems. For such combinatorial optimizations, genetic algorithm (GA) is a well known and popular tool. However, the GA is one of probabilistic algorithms and its reliability decreases as increasing the number of plies. In addition, GA requires several parameter tunings. The present study proposes a novel deterministic algorithm, that is named fractal-branch and bound method (FBBM). Using this method, the designers can optimize the bending stiffnesses certainly and immediately without any parameter tunings. In this paper, FBBM is applied to design bending-twisting coupling stiffnesses to show its high efficiency and reliability.

## 1. 緒 言

複合材料積層板は力学的特性が積層構成に強く依存するため、積層構成の最適設計が必要不可欠である。実際の構造物では、実験値の豊富さや製造上の理由により繊維配向角は  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$  の 4 種類に限定されることが多い。このため、積層構成の最適設計は限定された繊維配向角の組合せ最適化問題となる。

積層板の力学的特性は積層構成に対して著しい多峰性を示すため、従来は確率的な探索手法である GA によって最適設計が行われてきた<sup>1-12)</sup>。GA は組合せ最適化問題に適した最適化手法として注目されており、柔軟で

適用範囲が広いという利点があるが、積層数が増大すると正答率が低下し、また多数の GA パラメータのチューニングが必要である。

これに対して著者らは、分枝限定法 (branch and bound method) による決定論的な最適化手法を提案し、積層平板の座屈荷重最大化の問題に適用した<sup>13)</sup>。本手法はパラメータのチューニング作業が不要であり、高速かつ確実に最適解を得ることができる。

本手法は、設計空間が積層パラメータ空間上で作るフラクタル構造の発見に基づいている<sup>13)</sup>。著者らは、面外積層パラメータ空間に射影された積層構成の集合が、フラクタル図形を形成することを発見した<sup>13)</sup>。また、積層構成の最外層からの探索が有するフラクタル図形との幾何学的な対応関係も解明した。本手法はこの設計空間とフラクタル図形との対応を利用した分枝限定法であるため、フラクタル分枝限定法 (fractal-branch and bound method; FBBM) と名づけた。

文献 13) では FBBM を、曲げ-ねじりカップリング剛性  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  が無視できる直交異方性板の最適設計に適用した。本研究では FBBM を拡張することにより、

\*<sup>1</sup> 東京工業大学大学院 (152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

Graduate School, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

\*<sup>2</sup> 東京工業大学工学部 (152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology

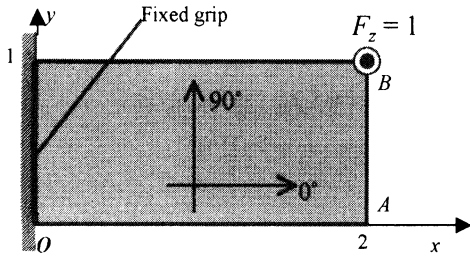


Fig. 1 Design model.

$D_{16}$ ,  $D_{26}$  を設計対象に含めることを可能とした。また、本手法を矩形積層平板の曲げ-ねじりカップリング剛性を設計する単純な例題に適用し、その有効性を示した。

2. 解析対象

著者らの提案する FBBM は面外剛性だけに依存する問題すべてに適用可能である。本研究では、本手法が曲げ-ねじりカップリング剛性の設計にも有効であることを示すために、簡便な例題に適用した。

Fig. 1 に最適設計対象を示す。図のように幅 1[m]、長さ 2[m] の積層平板があり、その一辺が全自由度拘束されている。点 B において板厚方向に荷重  $F_z=1$ [N] を負荷する。点 A には荷重は無いため、平板には曲げモーメントと同時にねじりモーメントも負荷される。本例題の目的は、積層構成を最適設計することによって、ねじれ変形を最小に抑える曲げ-ねじりカップリング剛性  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  を平板に与えることである。

本研究では以下の条件のもとで最適化を行う。

1. 平板は対称積層板。
2. 繊維配交角は  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $-45^\circ$  の 4 種類に限定。
3. 設計変数は積層構成のみ。板厚や材料定数は設計変数には含めない。

点 A のたわみ変位を  $u_A$ 、点 B のたわみ変位を  $u_B$  とする。これらの変位は荷重  $F_z$  に比例し、片側積層数  $N$  の 3 乗に反比例する。したがって、 $u_A$ ,  $u_B$  は次式で正規化できる。

$$u_A^* = \frac{N^3}{F_z} u_A, \quad u_B^* = \frac{N^3}{F_z} u_B \tag{1}$$

なお、本研究では  $F_z=1$  である。式(1)を用いて目的関数  $f$  を次式で定義する。

$$f = |u_A^* - u_B^*| \tag{2}$$

本例題の目的は  $f$  の最小化である。これにより点 A と点 B のたわみの差を最小にすることができ、結果的に

Table 1 Values of trigonometric functions.

$\theta_k$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$-45^\circ$
$\cos 2\theta_k$	1	0	-1	0
$\cos 4\theta_k$	1	-1	1	-1
$\sin 2\theta_k$	0	1	0	-1
$\sin 4\theta_k$	0	0	0	0

ねじれの変形を最小にすることができる。なお、各変位  $u_A$ ,  $u_B$  の値は ANSYS release 5.6 の FEM 解析により計算した。

3. 設計空間のフラクタル性

3.1 面外積層パラメータ

古典積層理論では、対称積層板の曲げモーメントベクトル  $\mathbf{M}$  と曲率ベクトル  $\mathbf{k}$  の関係は次式で表される<sup>14)</sup>。

$$\mathbf{M} = [D_{ij}] \mathbf{k} \tag{3}$$

ここで  $D_{ij}$  は面外剛性マトリックスである。 $D_{ij}$  は面外積層パラメータ  $W_i^*$  を用いて次式で表すことができる<sup>14)</sup>。

$$\begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} U_1 & W_1^* & W_2^* \\ U_1 & -W_1^* & W_2^* \\ U_4 & 0 & -W_2^* \\ U_5 & 0 & -W_2^* \\ 0 & W_3^*/2 & W_4^* \\ 0 & W_3^*/2 & -W_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ここで  $h$  は板厚、 $U_i$  は材料定数である。また  $W_i^*$  は積層構成のみによって決定されるパラメータであり、次式で与えられる。

積層構成  $[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_k/\dots/\theta_N]_s$  に対して

$$\begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_4^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \\ \sin 4\theta_k \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$a_k = \left( \frac{N-k}{N} \right)^3$$

$W_i^*$  は積層構成のみによって決定されるパラメータであるため、積層構成が面外剛性に及ぼす影響を表すパラメータであると考えられる。

本研究では、繊維配交角は  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $-45^\circ$  の 4 種類に限定する。そのため、式(5) 右辺の三角関数の値も Table 1 のように限定される。

3.2 面外積層パラメータ空間上の目的関数

本研究の例題は曲げの問題であるため、目的関数  $f$  の値は面外剛性  $D_{ij}$  のみによって決定される。

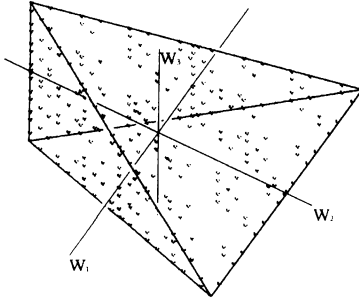


Fig. 2 The design space on bending lamination parameters (5 plies sym.).

$$f = f(D_{ij}) \quad (6)$$

ここで式(4)より、 $D_{ij}$ は面外積層パラメータ  $W_i^*$  および板厚  $h$ 、材料定数  $U_i$  によって決定される。すなわち、

$$f = f(W_i^*, h, U_i) \quad (7)$$

本研究での設計変数は積層構成のみであり、板厚や材料は設計変数ではない。すなわち、板厚  $h$  や材料定数  $U_i$  は固定されているため、 $f$  は  $W_i^*$  のみの関数となる。

$$f = f(W_1^*, W_2^*, W_3^*, W_4^*) \quad (8)$$

Table 1 から、 $\sin 4\theta_k$  は常に 0 であるため  $W_4^* = 0$  となることがわかる。このため  $W_4^*$  は無視することができる。式(8)は以下のように書き換えられる。

$$f = f(W_1^*, W_2^*, W_3^*) \quad (9)$$

以上により設計空間は  $W_1^*$ 、 $W_2^*$ 、 $W_3^*$  の三次元空間上にあることがわかる。

なお、文献 13) では直交異性を前提としていたため、 $W_3^* \geq 0$  として  $W_1^*$ 、 $W_2^*$  の二次元平面上の設計空間を扱った。本研究では曲げ-ねじりカップリング  $D_{16}$ 、 $D_{26}$  を扱うため、 $W_3^*$  を積極的に考慮する。

### 3.3 四面体をなす設計空間

Fig. 2 は、すべての片側 5 層対称積層構成 (総積層数 10 層) について面外積層パラメータを計算し、 $W_1^*$ 、 $W_2^*$ 、 $W_3^*$  の三次元空間上に表したものである。これは面外積層パラメータ空間に表された設計空間であると考えられる。設計空間は面外積層パラメータ空間において四面体の形状をなしている。

ここでは、設計空間が四面体をなすことを面外積層パラメータの式から導出する。式(5)のように、面外積層パラメータは次式で与えられている。

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで Table 1 より上式右辺のベクトルは以下の 4 つ

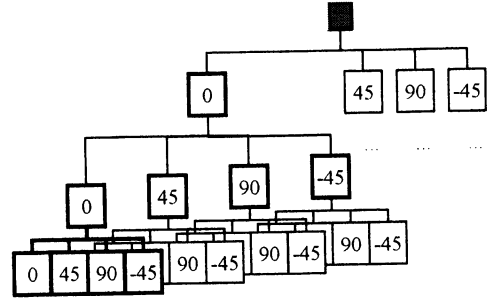


Fig. 3 Tree structure of design space.

に限定される。

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

よって、式(10)は式(11)のベクトルの線形和として次式のように表すことができる。

$$\mathbf{W} = s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{90} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{-45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで  $s_0$  は正の実数であり、次の関係が成り立つ。

$$s_0 + s_{45} + s_{90} + s_{-45} = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) = 1 \quad (13)$$

以上より、 $\mathbf{W}$  は式(11)の 4 点を頂点とする四面体領域内の点となる。

### 3.4 設計空間のフラクタル構造

積層構成の集合は Fig. 3 のような木構造をしていると考えられる。積層構成全体は、最外層の繊維配向角で以下の 4 種類の枝に分岐する。

$$[0^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s, [45^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s, \\ [90^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s, [-45^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s$$

ただし、\* は任意の繊維配向角 ( $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $-45^\circ$ ) を意味する。最外層が  $0^\circ$  層から始まる枝  $[0^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s$  はさらに以下の 4 種類に分岐する。

$$[0^*/0^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s, [0^*/45^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s, \\ [0^*/90^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s, [0^*/-45^*/\dots/\dots/\dots/\dots]_s$$

このように、積層構成の集合は四分木で表現することができる (Fig. 3 参照)。

本研究では Fig. 2 の設計空間がフラクタル性を有することを解明した。また、そのフラクタル性と Fig. 3 の木構造における枝との間には幾何学的な対応関係があることも解明した。FBBM ではこの対応関係を利用する。以下では設計空間の持つフラクタル性について説明

する。

最外層が  $0^\circ$  の枝  $[0^\circ/\dots/\dots]_s$  の面外積層パラメータを考える。式(10)において  $\theta_1=0^\circ$  を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=2}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \\ &= (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{s_0} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{s_0} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{-45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで  $s_0$  には以下の関係が成り立つ。

$$s_0 + s_{s_0} + s_{s_0} + s_{-45} = \sum_{k=2}^N (a_{k-1} - a_k) = a_1 \quad (15)$$

これより  $\mathbf{W}$  は以下の4点を頂点とする四面体領域となる。

$$\mathbf{p} + a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} + a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p} + a_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} + a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ただし、

$$\mathbf{p} = (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

同様の議論により、最外層が  $45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$  の場合にも  $\mathbf{W}$  は四面体領域となる。これらの四面体を Fig. 4 に示した。Fig. 2 で示した四面体の設計空間は、Fig. 4 では4つの四面体に分割されている。また、これらの四面体はそれぞれ Fig. 3 木構造における枝と対応していることも分かる。

一般的には、積層構成の枝は次のように表される。

$$[\theta_1/\dots/\theta_d/\dots/\dots]_s \quad (18)$$

これは、最外層から第  $d$  層までの繊維配交角が  $\theta_1, \dots, \theta_d$  である積層構成の集合を表している。この枝に対する面外積層パラメータは次式で表される。

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^d (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + \sum_{k=d+1}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \quad (28)$$

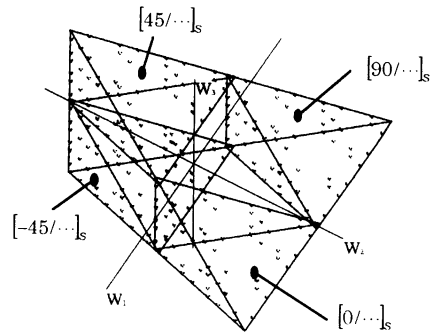


Fig. 4 Division of design space.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^d (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{s_0} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ s_{s_0} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{-45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、

$$s_0 + s_{s_0} + s_{s_0} + s_{-45} = \sum_{k=d+1}^N (a_{k-1} - a_k) = a_d \quad (20)$$

これより  $\mathbf{W}$  は以下の4点を頂点とする四面体領域となる。

$$\mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ただし、

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^d (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \quad (22)$$

以上により、積層構成の枝は必ず  $W_i^*$  空間上で四面体を形成することが示された。これらの四面体をすべて描画したものを Fig. 5 に示した。図から分かるように、設計空間は無数の四面体が再帰的に入れ子になったフラクタル性を有している。本研究では、式(18)で表される積層構成の枝がフラクタルを形成することから、式(18)をフラクタル分枝 (fractal-branch) と呼ぶことにする。

#### 4. フラクタル分枝限定法

##### 4.1 応答曲面による目的関数の近似

応答曲面法とは、実験計画法と最小二乗法を組み合わせ

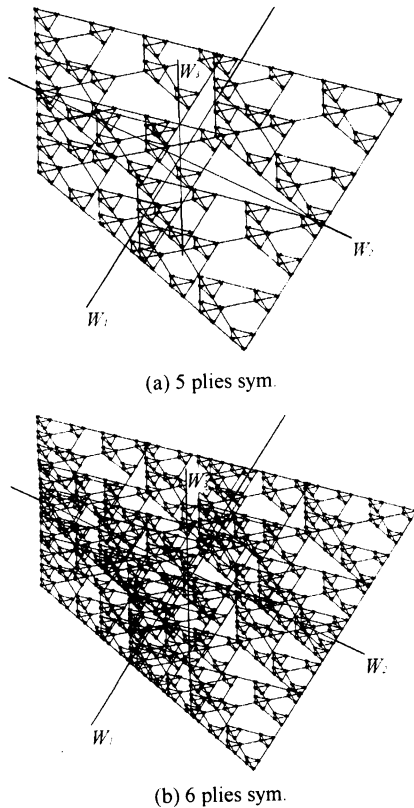


Fig. 5 Fractal structure of design space.

せることにより、限られたデータ数から効率よく応答の近似式を得る手法である。本研究では応答曲面法により、目的関数  $f$  を次式のような  $W_i^*$  の二次多項式に近似した。

$$\begin{aligned}
 f &= c + \mathbf{W}^T \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{W}^T [\mathbf{A}] \mathbf{W} \\
 &= c + b_1 W_1^* + b_2 W_2^* + b_3 W_3^* \\
 &\quad + \frac{1}{2} (A_{11} W_1^{*2} + A_{22} W_2^{*2} + A_{33} W_3^{*2}) \\
 &\quad + A_{12} W_1^* W_2^* + A_{23} W_2^* W_3^* + A_{13} W_1^* W_3^*
 \end{aligned} \tag{23}$$

まず著者らの一部が GA による積層構成最適化で用いた  $D$  最適基準<sup>12)</sup> に基づいて実験計画を実行し、解析点となる積層パラメータを選択した。次に選択された点における  $f$  の値を FEM 解析によって求め、最小二乗法により二次多項式の係数  $c$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $[\mathbf{A}]$  を決定した。

以下に目的関数を二次多項式の応答曲面で近似する理由を示す。

- (1) 著者らの研究により、積層パラメータを変数とした剛性に依存する目的関数は二次多項式で十分に近

似できることが示されている<sup>12)</sup>。

- (2) 応答曲面を作成すれば FEM 解析を行わずに目的関数の値が得られるため、計算時間が大幅に軽減できる。
- (3) 次項で述べるように、FBBM では、枝刈りの判定を行うために目的関数が単純な多項式で表されている必要がある。

応答曲面を用いることにより、積層構成  $[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_k/\dots/\theta_N]_s$  は以下のように評価される。

1. 積層パラメータ  $W_1^*$ ,  $W_2^*$ ,  $W_3^*$  を式(10) から計算する。
2. 式(23) に  $W_1^*$ ,  $W_2^*$ ,  $W_3^*$  を代入し、 $f$  の値を得る。

#### 4.2 フラクタル分枝の評価

FBBM では、枝刈りの判定に際して、その枝の先端の評価値を推定する必要がある。本研究の例題では  $f$  の最小化が目的であるため、枝の先端の評価値とは、フラクタル分枝に含まれる積層構成の評価値の最小値を意味する。推定は安全側でなくてはならず、その推定よりも小さな評価値を持つ積層構成がその枝に存在してはならない。すなわち、フラクタル分枝  $[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の推定  $g$  は次式を満たす必要がある。

$$g \leq \min\{f(s) | s \in [\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s\} \tag{24}$$

( $s$  は積層構成を表す)

フラクタル分枝  $[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  に対応する四面体領域を  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  で表すことにすると、 $g$  は次式で定義できる。

$$g = \min\{f(\mathbf{W}) | \mathbf{W} \in T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s\} \tag{25}$$

すなわち  $g$  は、目的関数  $f$  の定義域を四面体領域  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  に限定した場合の最小値である。  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  は連続領域であるのに対して積層構成は離散点であるため、常に式(24) の条件が満たされている。本研究では  $f$  は 2 次の応答曲面として表されているため、 $g$  の値は解析的に得ることができる。具体的な  $g$  の計算方法は付録として末尾に記した。

以上まとめると、フラクタル分枝  $[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の評価値  $g$  は以下の手順で得ることができる。

1. 式(21) からフラクタル分枝の四面体領域  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  を求める。
2. 定義域を  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  に限定して  $f$  の最小値  $g$  を計算する。

#### 4.3 フラクタル分枝限定法のアルゴリズム

分枝限定法<sup>15)</sup> では、最適解の得られる見込みのない枝を早い段階で放棄することで、計算時間を短縮する。

Table 2 Optimal stacking sequences.

$N$	$f$	Stacking sequence
6	0.709669	$[45/-45/45/90/90/-45]_s$
8	0.701967	$[45/45/-45/-45/90/90/90/45]_s$
10	0.701171	$[45/45/-45/90/45/-45/-45/-45/45]_s$
12	0.701158	$[-45/45/45/90/45/45/-45/45/45/-45/45/90]_s$ $[45/-45/45/45/-45/90/90/45/45/45/-45/45]_s$ $[45/-45/45/90/-45/45/45/45/45/45/-45/90]_s$ $[45/45/-45/-45/45/90/90/45/45/-45/45/45]_s$
14	0.701190	$[-45/45/45/45/45/90/-45/90/-45/45/45/45/45/45]_s$ $[45/-45/45/-45/45/90/45/90/45/45/45/45/-45/45]_s$

それまでに得られた最善の値と推定値によって枝刈りの可否を判定する。

現時点の最善値  $f_{min}$  に対して、あるフラクタル分枝  $[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の評価値  $g$  がそれよりも大きな値である場合を考える。

$$g > f_{min} \quad (26)$$

この場合、式(24)の関係から、そのフラクタル分枝の中には  $f_{min}$  よりも小さな評価値を持つ積層構成は存在しない。すなわち、そのフラクタル分枝中に最適解が含まれる見込みがないため、その枝の探索を打ち切ることができる。

以上を踏まえると、FBBMのアルゴリズムは以下のようなになる。

1. 乱数によりランダムな積層構成を生成し、その積層構成の評価値  $f$  を  $f_{min}$  とする。
2. 探索するフラクタル分枝を  $[*/\dots/*]_s$  に初期化する。
3.  $d=1$  から順に探索を開始し、フラクタル分枝  $[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の評価値  $g$  と現時点の最善値  $f_{min}$  を比較する。
  - (a)  $g > f_{min}$  の場合：探索を打ち切る。
  - (b)  $g \leq f_{min}$  の場合：フラクタル分枝を以下の4つに分岐して、3を繰り返す。  
 $[\theta_1/\dots/\theta_d/0°/*/\dots/*]_s$ ,  $[\theta_1/\dots/\theta_d/45°/*/\dots/*]_s$ ,  
 $[\theta_1/\dots/\theta_d/90°/*/\dots/*]_s$ ,  $[\theta_1/\dots/\theta_d/-45°/*/\dots/*]_s$
4.  $f_{min}$  よりも小さな評価値の積層構成が得られた場合には、 $f_{min}$  を得られた値で置き換える。
5. 最終的に残った積層構成が最適解。

5. 計算結果

式(23)の応答曲面  $f$  は以下のように求まった。

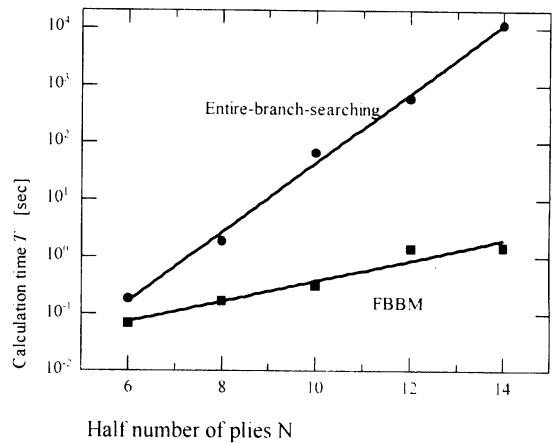


Fig. 6 Calculation time (Pentium II 400 MHz).

$$f = 13.5 + 18.0W_1* + 7.99W_2* - 18.4W_3* + 0.522W_1*^2 - 1.60W_2*^2 + 27.1W_3*^2 - 14.8W_1*W_2* - 0.929W_2*W_3* - 17.4W_1*W_3* \quad (27)$$

ここで式(27)の決定係数は  $R_{adj}^2 = 0.9979$  である。

この  $f$  の最小化を目的としてFBBMを実施したところ、Table 2のような最適積層構成が得られた。この結果は総当り探索の結果とすべて一致したので、本手法の正確な探索が確認された。

また、FBBMと総当り探索の片側積層数  $N$  に対する計算時間をPC (Pentium II 400 MHz) で計測し、Fig. 6に示した。総当り探索の計算量は  $O(4^N)$  であるのに対し、FBBMの計算量は  $O(1.51^N)$  であり、大幅に計算量のオーダーが下がっている。  $N=14$  の場合の計算時間は、総当り探索では3時間以上も要したのに対し、FBBMではわずか1.46秒で解が求まった。以上より、本手法の著しい有効性が示された。

## 6. 結 言

得られた結果を以下に示す。

1.  $W_1^*$ ,  $W_2^*$ ,  $W_3^*$  の三次元空間において, 設計空間が無数の四面体が入れ子になったフラクタル構造をなすことを明らかにした。
2. 積層構成が作る四分木と四面体との対応関係を導出した。
3. フラクタル構造を利用した新しい積層構成最適化手法である, フラクタル分枝限定法 (fractal-branch and bound method; FBBM) を提案した。
4. 矩形積層平板の曲げ-ねじりカップリングを設計する単純な例題に FBBM を適用し, 本手法の著しい有効性を示した。

## 参 考 文 献

- 1) M. Miki : ASTM STP, 864 (1985), p. 387.
- 2) H. Fukunaga & H. Sekine : *AIAA J.*, **30** (1992), 2791-2793.
- 3) R. Le Riche & R.T. Haftka : *AIAA J.*, **31** (1993), 951-956.
- 4) 轟 章, 渡辺 究, 小林英男 : 機論 A, **60** (1994), 1266-1271.
- 5) 福永久雄, 関根英樹 : 日本航空宇宙学会誌, **42** (1994), 371-380.
- 6) K. Yamazaki : AIAA-96-1539-CP (1996), p. 1882.
- 7) P.N. Harrison, R. Le Riche & R.T. Haftka : AIAA-95-1163-CP (1995), p. 58.
- 8) 座古 勝, 高野直樹, 辻上哲也 : 材料, **45**, 12 (1996), 1316-1321.
- 9) S.N. Grangadharan & Y. Fiocca : AIAA-97-1236 (1996).
- 10) 青木義男, 福嶋裕輔, 邊 吾一 : 機論 A, **63** (1997), 1028-1035.
- 11) 太田佳樹, 成田吉弘, 引地 圭 : 第7回設計工学・システム部門講演会講演論文集 (1997), p. 234.
- 12) 轟 章, R.T. Haftka : 機論 A, **64**, 621 (1998), 1138-1145.
- 13) 寺田雄一郎, 轟 章, 島村佳伸 : 機論 A, **66**, 644 (2000), 714-720.
- 14) 三木光範, 福田武人, 元木信弥, 北條正樹 : 機械システム入門シリーズ8 複合材料, 共立出版, 東京 (1997).
- 15) 石畑 清 : アルゴリズムとデータ構造, 岩波書店, 東京 (1989).

付録 フラクタル分枝の評価値  $g$  の計算

フラクタル分枝の評価値  $g$  は, 対応する四面体  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  に定義域を限定したときの  $f$  の最小値で定義される。応答曲面  $f$  は次式で表される。

$$f = c + \mathbf{W}^T \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{W}^T [\mathbf{A}] \mathbf{W} \quad (\text{A-1})$$

四面体  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の4つの頂点  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}, \mathbf{w}_{-45}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{w}_{45} &= \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{w}_{90} &= \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{w}_{-45} &= \mathbf{p} + a_d \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ただし,

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

応答曲面  $f$  が下に凸で, 四面体  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の内側に極小点が存在する場合には,  $g$  の値はその極小値となる。

この  $f$  が下に凸か否かの判定には, 以下に示す  $[\mathbf{A}]$  の不変量を用いる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}[\mathbf{A}]A_{11} + A_{22} + A_{33} \\ I_2 &= A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{33}A_{11} - (A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{13}^2) \\ I_3 &= \det[\mathbf{A}] \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

$f$  が下に凸になる必要十分な条件は,  $[\mathbf{A}]$  の固有値がすべて正になることである。すなわち, 以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} I_1, I_2, I_3 &> 0 \\ \Leftrightarrow [\mathbf{A}] \text{ の固有値はすべて正} & \quad (\text{A-5}) \\ \Leftrightarrow f \text{ は下に凸} & \end{aligned}$$

$f$  に極値を与える点は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \mathbf{b} + [\mathbf{A}] \mathbf{W} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{W} &= -[\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

この極小点  $\mathbf{W}$  が四面体  $T[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]_s$  の内側に含まれるか判定するには, 次のようにする。まず,  $\mathbf{W}$  を四面体の頂点  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}, \mathbf{w}_{-45}$  の線形結合として以下のように表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= s_0 \mathbf{w}_0 + s_{45} \mathbf{w}_{45} + s_{90} \mathbf{w}_{90} + s_{-45} \mathbf{w}_{-45} \\ &= s_0 \mathbf{w}_0 + s_{45} \mathbf{w}_{45} + s_{90} \mathbf{w}_{90} + (1 - s_0 - s_{45} - s_{90}) \mathbf{w}_{-45} \\ &= \mathbf{w}_{-45} + s_0 (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_{-45}) + s_{45} (\mathbf{w}_{45} - \mathbf{w}_{-45}) \\ &\quad + s_{90} (\mathbf{w}_{90} - \mathbf{w}_{-45}) \\ &= \mathbf{w}_{-45} + s_0 a_d \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{45} a_d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s_{90} a_d \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$= \mathbf{w}_{-45} + \alpha_d \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_{45} \\ s_{90} \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

$s_0$  の値は次式で求まる.

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_{45} \\ s_{90} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_d} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{W} - \mathbf{w}_{-45}) \quad (\text{A-8})$$

次式を満たすとき, 極小点  $\mathbf{W}$  は  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}, \mathbf{w}_{-45}$  を頂点とする四面体の内側に含まれる.

$$s_0, s_{45}, s_{90} > 0 \text{ かつ } s_0 + s_{45} + s_{90} < 1 \quad (\text{A-9})$$

次に,  $f$  が下に凸ではない場合, あるいは極小点が四面体の内側に含まれない場合を考える. この場合には,  $f$  を最小にする点は四面体の境界面上にあることになる. 例として,  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}$  の3点を頂点とする平面における  $f$  の最小値を求める手順を示す.

$\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}$  の3点を頂点とする面上の点は, 次式で表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= s_0 \mathbf{w}_0 + s_{45} \mathbf{w}_{45} + (1 + s_0 - s_{45}) \mathbf{w}_{90} \\ &= \mathbf{w}_{90} + s_0 (\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_{90}) + s_{45} (\mathbf{w}_{45} - \mathbf{w}_{90}) \\ &= \mathbf{w}_{90} + s_0 \alpha_d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_{45} \alpha_d \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{w}_{90} + \alpha_d \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_{45} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{w}_{90} + [\mathbf{T}] \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

ただし,

$$s_0, s_{45} > 0, s_0 + s_{45} < 1 \quad (\text{A-11})$$

式(A-10)を式(A-1)の応答曲面の式に代入すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} f' &= f(\mathbf{w}_{90}) + \mathbf{s}^T [\mathbf{T}]^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{W}}(\mathbf{w}_{90}) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{T}] \mathbf{s} \\ &= c' + \mathbf{s}^T \mathbf{b}' + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T [\mathbf{A}'] \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

この  $f'$  は点  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}$  からなる平面上の応答である.  $f'$  が下に凸で, かつ極小点が  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{45}, \mathbf{w}_{90}$  を頂点とする三角形に含まれるとき, その極小値が求めるべき最小値である.  $f'$  が下に凸でないか極小点が三角形に含まれない場合には, 求めるべき最小値は三角形の辺上にある. その最小値は上記と同様の手順を繰り返すことで求められる.

すべての面, すべての辺についてそれぞれ上記の手順を繰り返し, 得られた値の中で最小の値が  $g$  の値となる.