

フラクタル分枝限定法の非対称積層構成最適化への拡張*

松崎亮介^{*1}, 轟章^{*2}

Stacking Sequence Optimizations using Fractal Branch and Bound Method for Unsymmetrical Laminates

Ryosuke MATSUZAKI^{*3}, Akira TODOROKI

^{*3} Department of Mechanical Sciences, and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

Fractal branch-and-bound method has been developed by the authors for the optimization of stacking sequences of symmetric and balanced composite laminates that has two in-plane and two out-of-plane lamination parameters. In the present study, a stacking sequence optimization of an unsymmetrical composite laminate is examined. In the unsymmetrical laminates, nine lamination parameters including three coupling lamination parameters are not zero. Using tetrahedral fractal patterns of feasible laminates of in-plane and out-of-plane lamination parameter coordinates, and a tetradehedron fractal pattern of a coupling lamination parameter coordinates, fractal branch-and-bound method is applied to optimize the stacking sequence of unsymmetrical laminates. This new method is applied to a stacking sequence optimization problem of a maximization of buckling load of cylindrical shell structure. As a result, the method is successfully applied, and the practical optimal stacking sequence is obtained.

Key Words: Composite Material, Optimum Design, Laminated Construction, Stacking Sequence, Lamination Parameter, Cylindrical Shells, Buckling.

1. 緒言

複合材料は、高い比強度・比剛性を持つため、航空宇宙分野をはじめとして多くの分野で使用されている。複合材料の特性は積層構成に大きく依存するため、積層構成の最適設計が必要不可欠である。

Miki⁽¹⁾や Fukunaga ら⁽²⁾は積層板の剛性を少数のパラメータと材料物性値だけで記述する積層パラメータを用いた積層構成最適化手法を提案しており、解空間が単純となる有用性が確かめられている。実際の複合材料構造は製造上の理由のみならず、設計上必要な実験データの不足に起因して、実現可能な積層構成が 0° , $\pm 45^\circ$, 90° に限定されている場合が多い。これらの要求から、積層構成最適化は組み合わせ最適化問題となる。この問題に対し、GA^{(3)~(5)}を用いる最適化手法が提案されているが、評価の繰り返しに起因して計算コストが増大する問題がある。

Todoroki ら^{(6)~(8)}は分枝限定法による決定論的な積層

構成最適化手法として、フラクタル分枝限定法を提案した。本手法は設計空間が対称積層板の積層パラメータ空間上で作るフラクタル構造の発見に基づいている。これまでに本手法を用いて対称バランス積層板の積層構成最適化を実施している。対称バランス積層板の場合、近似的に直交異方性積層板として扱うことで2つの面内積層パラメータと2つの面外積層パラメータに減らすことが可能であり、面内/面外それぞれの積層パラメータ空間を2次元のフラクタル図形として描くことが可能であった⁽⁷⁾。しかし複合材料円筒殻等では、円筒殻全体で対称構造とみなせるため、非対称積層構成を含めて積層構成最適化を実施する必要がある^{(9)~(11)}。

非対称積層板では3つの面内積層パラメータ、3つの面外積層パラメータに加えて、3つの連成積層パラメータが非ゼロとなる。本研究ではまず、繊維配向角が 0° , $\pm 45^\circ$, 90° に限定された非対称積層構成の面内/面外積層パラメータ設計空間が四面体フラクタル図形を描くことを示す。また、実現積層構成の連成積層パラメータ設計空間を明らかにし、積層構成の集合が連成積層パラメータ空間で十四面体フラクタル図形を描くことを示す。さらに非対称積層板の面内/面外/連成積層パラメータのフラクタル性を利用して、非対

*平成 年 月 日受付

*1 准員, 東京工業大学大学院

(〒152-8852 東京都目黒区大岡山 2-12-1-II-58)

E-mail: rmatsuza@ginza.mes.titech.ac.jp

*2 正員, 東京工業大学工学部

積層板積層構成最適化へのフラクタル分枝限定法が適用可能であることを示す．本研究では，複合材料円筒殻の座屈荷重最大化積層構成最適化問題を例に提案する手法の有効性を示す．

2. 積層構成最適化手法

2.1 積層パラメータ 積層数 N の積層板における各プライの番号付けを片側（円筒殻の場合内側）から $1, \dots, N$ とすると，面内積層パラメータ $V_{1,2,3,4}^A$ ，連成積層パラメータ $V_{1,2,3,4}^B$ ，面外積層パラメータ $V_{1,2,3,4}^D$ は次式で定義される⁽¹²⁾．

$$V_{[1,2,3,4]}^A = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{bmatrix} \cos 2\theta(z) \\ \cos 4\theta(z) \\ \sin 2\theta(z) \\ \sin 4\theta(z) \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N (a_k^A - a_{k-1}^A) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \\ \sin 4\theta_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

where $a_k^A = \frac{2k - N}{2N}$

$$V_{[1,2,3,4]}^B = \frac{4}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta(z) \\ \cos 4\theta(z) \\ \sin 2\theta(z) \\ \sin 4\theta(z) \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N (a_k^B - a_{k-1}^B) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \\ \sin 4\theta_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

where $a_k^B = 2 \left(\frac{2k - N}{2N} \right)^2$

$$V_{[1,2,3,4]}^D = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^3 \begin{bmatrix} \cos 2\theta(z) \\ \cos 4\theta(z) \\ \sin 2\theta(z) \\ \sin 4\theta(z) \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N (a_k^D - a_{k-1}^D) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \\ \sin 4\theta_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

where $a_k^D = 4 \left(\frac{2k - N}{2N} \right)^3$

ここで z は積層板中央面からの距離， h は板厚である．繊維配向角は $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ に限定されているため，常にゼロとなる $V_{1,2,3,4}^{A,B,D}$ を除いた 3 次元空間として積層パラメータ空間を取り扱う．

2.2 実験計画および応答曲面の作成 フラクタル分枝限定法は最適化の目的関数 f を面内/面外/連成積層パラメータ $V_{1,2,3}^A, V_{1,2,3}^D, V_{1,2,3}^B$ の 2 次多項式で近似する．簡単のため， $V_{1,2,3}^A = V^A, V_{1,2,3}^B = V^B, V_{1,2,3}^D = V^D$ と置き換えると 2 次多項式を用いて応答曲面は次式となる．

$$f(V^A, V^B, V^D) = c + \begin{bmatrix} V^{AT} & V^{BT} & V^{DT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{V^A} \\ b_{V^B} \\ b_{V^D} \end{bmatrix} + \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} V^{AT} & V^{BT} & V^{DT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{V^A V^A} & A_{V^A V^B} & A_{V^A V^D} \\ A_{V^B V^A} & A_{V^B V^B} & A_{V^B V^D} \\ A_{V^D V^A} & A_{V^D V^B} & A_{V^D V^D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^A \\ V^B \\ V^D \end{bmatrix}$$

ここで， c, b, A は最小 2 乗法で得られた定数，係数ベクトルおよび係数行列である．未知係数は 55 個であ

り，経験的にその 2 倍の 110 個の解析点により最小 2 乗法で応答 f が近似できる．この 110 点の選択には精度のよい応答曲面を作成する目的で D 最適実験計画を実施する．実験計画および応答曲面法に関する詳細は文献 [13] を参照されたい．

2.3 積層パラメータのフラクタル性 繊維配向角に拘束条件を導入することで，式(1)，(2)，(3)の三角関数の値は次式のように限定される．

$$V_{[1,2,3]}^X = s_0^X n_0 + s_{45}^X n_{45} + s_{90}^X n_{90} + s_{-45}^X n_{-45} \quad (5)$$

with $X=A,B,D$

ただし，

$$n_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, n_{45} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, n_{90} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, n_{-45} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$s_j^X = \sum_{k=1}^N \delta_k (a_k^X - a_{k-1}^X) \quad (7)$$

$$\delta_k = 1 \text{ when } \theta_k = \theta_j \text{ with } j=0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$$

$$\delta_k = 0 \text{ when } \theta_k \neq \theta_j \text{ with } j=0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$$

式(5)の係数 s は式(1)，(2)，(3)の定義より，次の条件を満足する．

$$0 \leq s_j^X \leq 1 \quad \text{with } X=A,D \quad (8)$$

$$-1/2 \leq s_j^B \leq 1/2 \quad (9)$$

$$s_0^X + s_{45}^X + s_{-45}^X + s_{90}^X = 1, \quad \text{with } X=A,D \quad (10)$$

$$s_0^B + s_{45}^B + s_{-45}^B + s_{90}^B = 0 \quad (11)$$

式(8)，(10)は，面内面外積層パラメータ $V_{1,2,3}^A, V_{1,2,3}^D$ を 3 次元ベクトルと考えたとき，積層パラメータ空間上で，任意の積層板の積層構成ベクトルが式(6)の 4 方位のベクトルで定義される四面体の内部に位置することを示している．

ここで N 層積層板において， d ($N > d$) 層分の繊維配向角が決定している次の積層構成を考える．ただし層別最適化⁽¹⁴⁾と同様に繊維配向角は，連性/面外積層パラメータへの影響が大きい最外層から決定していく．

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{d-1} \ \theta_d / \dots / \dots / \theta_{N-1} \ \theta_N] \quad \text{when } d \text{ is even} \quad (12)$$

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{d-1} \ \theta_d / \dots / \dots / \theta_{N-1} \ \theta_N] \quad \text{when } d \text{ is odd} \quad (13)$$

ここで， θ_1 から θ_d は固定された繊維配向角であり， $*$ は未定の繊維配向角を意味している．

式(12)，(13)の積層構成の積層パラメータ $V_{1,2,3}^A, V_{1,2,3}^D$ は次式になる．

$$V_{[1,2,3]}^X = V_0^X + s_0^X n_0 + s_{45}^X n_{45} + s_{90}^X n_{90} + s_{-45}^X n_{-45} \quad (14)$$

with $X=A,D$

ここで V_0^X, s_j^X は次式で定義される．

$$V_0^X = \sum_{k=1}^{d/2} (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + \sum_{k=N-d/2+1}^N (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

when d is even

$$\mathbf{V}_0^X = \sum_{k=1}^{(d+1)/2} (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + \sum_{k=N-(d-3)/2}^N (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix}$$

when d is odd (16)

$$s_j^X = \sum_{k=d/2+1}^{N-d/2} \delta(a_k^X - a_{k-1}^X) \quad \text{when } d \text{ is even (17)}$$

$$s_j^X = \sum_{k=(d+1)/2+1}^{N-(d-1)/2} \delta(a_k^X - a_{k-1}^X) \quad \text{when } d \text{ is odd (18)}$$

式(17), (18)の内の係数の総和はそれぞれ $(a_{N-d/2}^X - a_{d/2}^X)$ および $(a_{N-(d-1)/2}^X - a_{(d+1)/2}^X)$ となり, 式(17), (18)の代わりに次式を定義する.

$$p_j^X = \frac{1}{a_{N-d/2}^X - a_{d/2}^X} s_j^X \quad \text{when } d \text{ is even (19)}$$

$$p_j^X = \frac{1}{a_{N-(d-1)/2}^X - a_{(d+1)/2}^X} s_j^X \quad \text{when } d \text{ is odd (20)}$$

これにより, 係数 p は式(8), (10)の条件を満たし s と同じになる. これを用いて, 式(12), (13)の積層構成の集合を積層パラメータ $\mathbf{V}^A, \mathbf{V}^D$ で表すと次式で表される.

$$\mathbf{V}^X = \mathbf{V}_0^X + (a_{N-d/2}^X - a_{d/2}^X) \mathbf{V}_d^X \quad \text{when } d \text{ is even (21)}$$

$$\mathbf{V}^X = \mathbf{V}_0^X + (a_{N-(d-1)/2}^X - a_{(d+1)/2}^X) \mathbf{V}_d^X \quad \text{when } d \text{ is odd (22)}$$

with $X=A, D$

ここで \mathbf{V}_0^X は次式で定義される.

$$\mathbf{V}_0^X = \sum_{k=1}^{d/2} (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + \sum_{k=N-d/2+1}^N (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix}$$

when d is even (23)

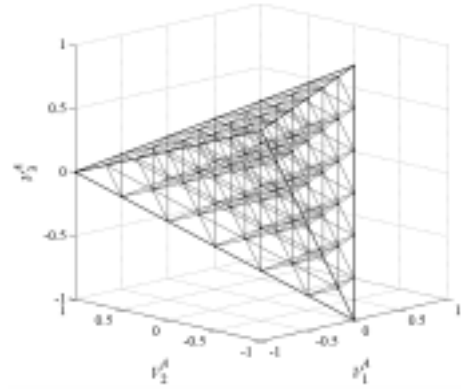
$$\mathbf{V}_0^X = \sum_{k=1}^{(d+1)/2} (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + \sum_{k=N-(d-3)/2}^N (a_k^X - a_{k-1}^X) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix}$$

when d is odd (24)

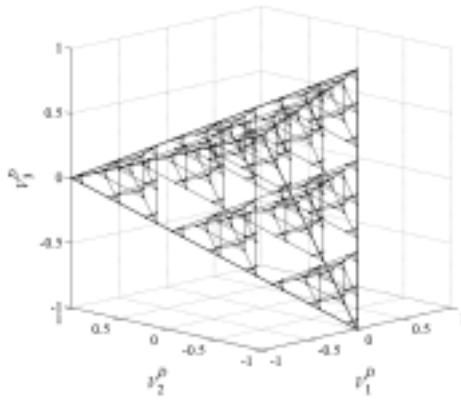
また \mathbf{V}_d^X は,

$$\mathbf{V}_d^X = p_0^X \mathbf{n}_0 + p_{45}^X \mathbf{n}_{45} + p_{90}^X \mathbf{n}_{90} + p_{-45}^X \mathbf{n}_{-45} \quad (25)$$

式(21), (22)より, 式(12), (13)の積層構成の集合は中心がそれぞれ $\mathbf{V}_0^A, \mathbf{V}_0^D$ に移動し, ベクトルの大きさが $(a_{N-d/2}^X - a_{d/2}^X)$ および $(a_{N-(d-1)/2}^X - a_{(d+1)/2}^X)$ に縮小した自己相似な四面体の面上または内部に位置することがわかる. 以上から, 面内積層パラメータ $\mathbf{V}_{1,2,3}^A$, 面外積層パラメータ $\mathbf{V}_{1,2,3}^D$ 空間において, 外側から各層の繊維配向角が決定されるとその内側が未決定の積層板集合は自己相似な四面体の面上または内部に存在し, 積層構成の集合が四面体フラクタル図形を描くようになる. 積層数 $N=6$ の場合, 面内/面外積層パラメータ空間におけるすべての自己相似の四面体は図 1 のようになる. 非対称積層板の面内/面外積層パラメータ設計空間におけるフラクタル構造は対称積層板フラクタル構造⁽⁶⁾ とほぼ同様であるため, 詳細については省略する.



(a) In-plane lamination parameter, $\mathbf{V}_{1,2,3}^A$



(b) Out-of-plane lamination parameter, $\mathbf{V}_{1,2,3}^D$

Fig. 1 Fractal tetrahedron pattern of feasible laminates drawn by plotting all feasible laminates of six plies in lamination parameters.

一方, 連続積層パラメータ $\mathbf{V}_{1,2,3}^B$ 空間では式(9), (11)より四面体フラクタル図形は描かない. そこで, 式(2)より $\mathbf{V}_{1,2,3}^B$ を次式のように表す. ただし積層数 N は偶数とする. N が奇数の場合も中央層 ($\mathbf{V}_{1,2,3}^B=0$) の取り扱いが異なるだけであとは同様である.

$$\mathbf{V}_{[1,2,3]}^B = \sum_i \sum_j s_{i/j}^B \mathbf{n}_{i/j} \quad \text{with } i, j=0, \pm 45, 90 \quad (26)$$

ここで, 係数 s , 行列 \mathbf{n} は次式で定義される.

$$s_{i/j}^B = 2 \sum_{k=N/2+1}^N \delta_k (a_k^B - a_{k-1}^B) \quad (27)$$

$$\delta_k = 1 \text{ when } \theta_k = \theta_i \text{ and } \theta_{N-k+1} = \theta_j$$

$$\delta_k = 0 \text{ when } \theta_k \neq \theta_i \text{ or } \theta_{N-k+1} \neq \theta_j$$

$$\mathbf{n}_{i/j} = \frac{-\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_j}{2} \quad (28)$$

$\mathbf{n}_{i/j}=0$ より式(26)は次式となる.

$$\mathbf{V}_{[1,2,3]}^B = s_{0/45}^B \mathbf{n}_{0/45} + s_{0/90}^B \mathbf{n}_{0/90} + s_{0/-45}^B \mathbf{n}_{0/-45} + s_{45/0}^B \mathbf{n}_{45/0} + s_{45/90}^B \mathbf{n}_{45/90} + s_{45/-45}^B \mathbf{n}_{45/-45} + s_{90/0}^B \mathbf{n}_{90/0} + s_{90/45}^B \mathbf{n}_{90/45} + s_{90/-45}^B \mathbf{n}_{90/-45} + s_{-45/0}^B \mathbf{n}_{-45/0} + s_{-45/45}^B \mathbf{n}_{-45/45} + s_{-45/90}^B \mathbf{n}_{-45/90} \quad (29)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_{0/45} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{0/90} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{0/-45} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{n}_{45/0} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{45/90} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{45/-45} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (30) \\
 \mathbf{n}_{90/0} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{90/45} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{90/-45} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{n}_{-45/0} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{-45/45} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{-45/90} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

式(29)の係数 s は式(27)の定義より，次の条件を満足する．

$$0 \leq s_{i/j}^B \leq 1 \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 & s_{0/45}^B + s_{0/90}^B + s_{0/-45}^B + s_{45/0}^B + s_{45/90}^B + s_{45/-45}^B + \\
 & s_{90/0}^B + s_{90/45}^B + s_{90/-45}^B + s_{-45/0}^B + s_{-45/45}^B + s_{-45/90}^B \quad (32) \\
 & = 1 - s_{0/0}^B - s_{45/45}^B - s_{90/90}^B - s_{-45/-45}^B \leq 1
 \end{aligned}$$

式(31)，(32)は，連成積層パラメータ $\mathbf{V}_{1,2,3}^B$ を 3次元ベクトルと考えたとき，積層パラメータ空間上で任意の積層板の積層構成ベクトルが，式(30)の 12 方位のベクトルで定義される十二頂点の十四面体（図 2）の内部に位置することを示している⁽¹⁵⁾．ここで式(12)に示した偶数層の繊維配向角が決定している場合の $\mathbf{V}_{1,2,3}^B$ は次式になる．

$$\mathbf{V}_{[1,2,3]^T}^B = \mathbf{V}_0^B + \sum_i \sum_j s_{i/j}^B \mathbf{n}_{i/j} \quad \text{with } i, j = 0, \pm 45, 90 \quad (33)$$

ここで \mathbf{V}_0^B ， $s_{i/j}^B$ は，次式で定義される．

$$\mathbf{V}_0^B = \sum_{k=1}^{d/2} (a_k^B - a_{k-1}^B) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} + \sum_{k=N-d/2+1}^N (a_k^B - a_{k-1}^B) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$s_{i/j}^B = 2 \sum_{k=N/2+1}^{N-d/2} \delta_k (a_k^B - a_{k-1}^B) \quad (35)$$

式(35)の内の係数の総和は $2a_{N-d/2}^B$ となり，式(35)の代わりに次式を定義する．

$$p_{i/j}^B = \frac{1}{2a_{N-d/2}^B} s_{i/j}^B \quad (36)$$

この係数 p は式(31)，(32)と同様の条件を満足する．これを用いて，式(12)の連成積層パラメータ集合を \mathbf{V}^B で表すと次式になる．

$$\mathbf{V}^B = \mathbf{V}_0^B + 2a_{N-d/2}^B \mathbf{V}_d^B \quad (37)$$

ここで \mathbf{V}_d^B は，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_d^B &= p_{0/45}^B \mathbf{n}_{0/45} + p_{0/90}^B \mathbf{n}_{0/90} + p_{0/-45}^B \mathbf{n}_{0/-45} + \\
 & p_{45/0}^B \mathbf{n}_{45/0} + p_{45/90}^B \mathbf{n}_{45/90} + p_{45/-45}^B \mathbf{n}_{45/-45} + p_{90/0}^B \mathbf{n}_{90/0} + \\
 & p_{90/45}^B \mathbf{n}_{90/45} + p_{90/-45}^B \mathbf{n}_{90/-45} + p_{-45/0}^B \mathbf{n}_{-45/0} + p_{-45/45}^B \mathbf{n}_{-45/45} + \\
 & p_{-45/90}^B \mathbf{n}_{-45/90} \quad (38)
 \end{aligned}$$

式(37)，(38)より，偶数層繊維配向角決定済み積層構成の連成積層パラメータ集合は中心がそれぞれ \mathbf{V}_0^B に移動し，ベクトルの大きさが $2a_{N-d/2}^B$ に縮小した自己相似な十四面体の面上または内部に存在し，十四面体フラクタル図形を描く．例として積層数 $N=6$ で最外層の 2 層のみが決定している $[\theta_i^*/\dots/\theta_j^*/\theta_k^*]$ の場合の積層構成の集合を図 3 に示す．また最外層の 4 層が決定している積層構成の集合 $[0/\theta_i^*/\dots/\theta_j^*/90]$ は図 4 に示すように図 3(c)の $[0^*/\dots/\theta_j^*/90]$ の内部に存在する．

一方，式(13)に示した奇数 d 層の繊維配向角が決定している場合の連成積層パラメータ空間における積層構成の集合は，図 5 に示すように θ_{i_d} を含む偶数 $(d+1)$ 層決定済みの 4 つの十四面体を凸包する変則的な十四面体で表される．たとえば式(14)の $\theta_{i_d}=0^\circ$ ($N=6$ ， $d=1$) における積層構成の集合 $[0^*/\dots/\theta_j^*]$ は，図 4(a)～(d)に示した $[0^*/\dots/\theta_j^*/0]$ ， $[0^*/\dots/\theta_j^*/45]$ ， $[0^*/\dots/\theta_j^*/90]$ ， $[0^*/\dots/\theta_j^*/-45]$ が描く十四面体を凸包する図 5(a)に示すような十四面体となる．積層数 $N=6$ の場合，連成積層パラメータ空間におけるすべての自己相似の十四面体は図 6 のようになる．

繊維配向決定済み層が d 層のときの，面内面外連成積層パラメータが描く四面体または十四面体図形の初期形状との相似比 r_{i_d} （縮小率）の変化を図 7 に示す．図中の印は式(12)，(13)のように最外層から繊維配向を決定した場合，印は片側から決定した場合の縮小率である．最外層から決定することでフラクタル図形の縮小率が小さくなり，繊維配向角決定済み層が少ないうちから実現可能積層構成が存在する空間を効率よく限定することが可能となる．

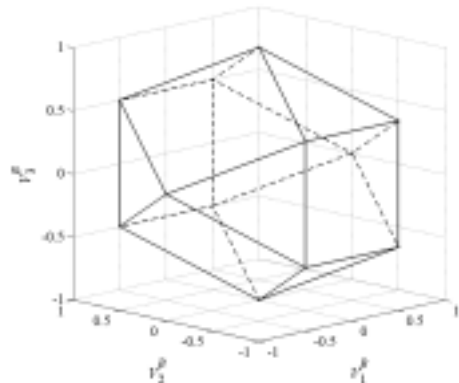
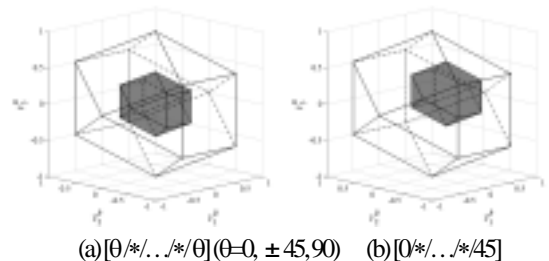


Fig. 2 Feasible region of coupling lamination parameter, $\mathbf{V}_{1,2,3}^B$.



(a) $[\theta_i^*/\dots/\theta_j^*/\theta_k^*]$ ($\theta=0, \pm 45, 90$) (b) $[0^*/\dots/\theta_j^*/45]$

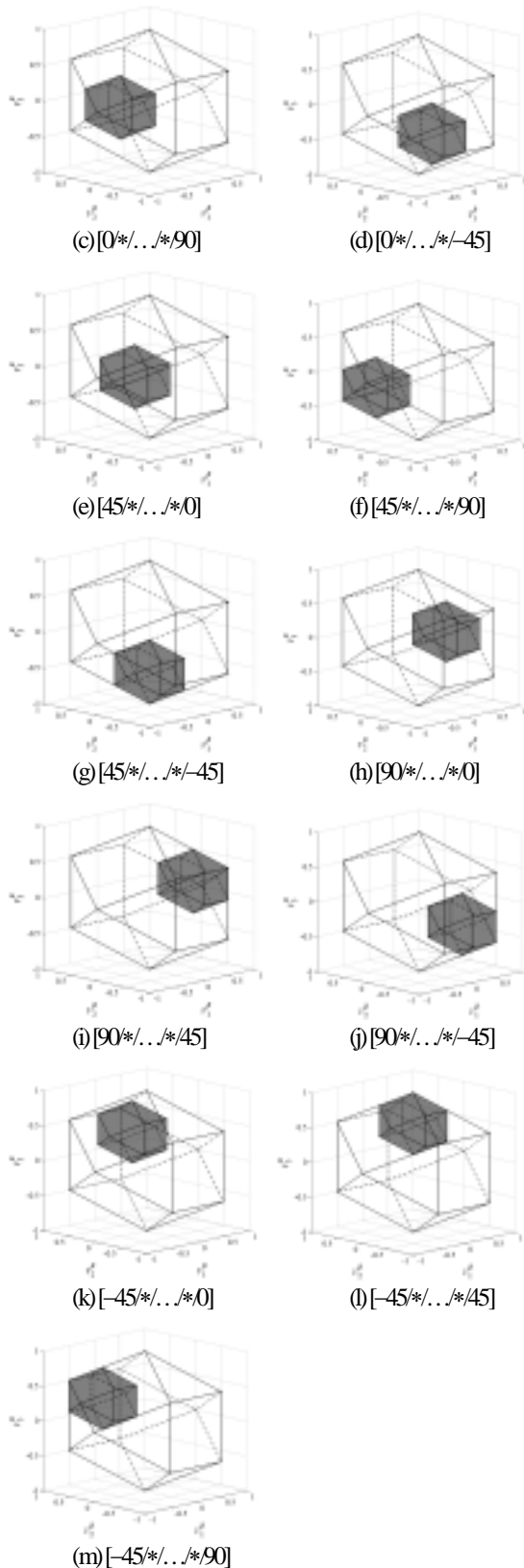


Fig. 3 Feasible region of coupling lamination parameter when $[\theta_1^*/\dots/\theta_2^*]$ of six plies.

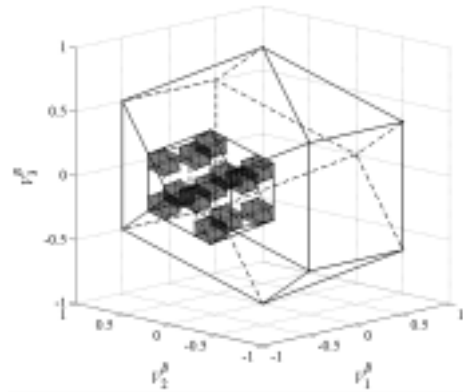


Fig. 4 Feasible region of coupling lamination parameter when $[0/\theta_1^*/\dots/\theta_2^*/90]$ of six plies ($\theta_1, \theta_2=0, \pm 45, 90$).

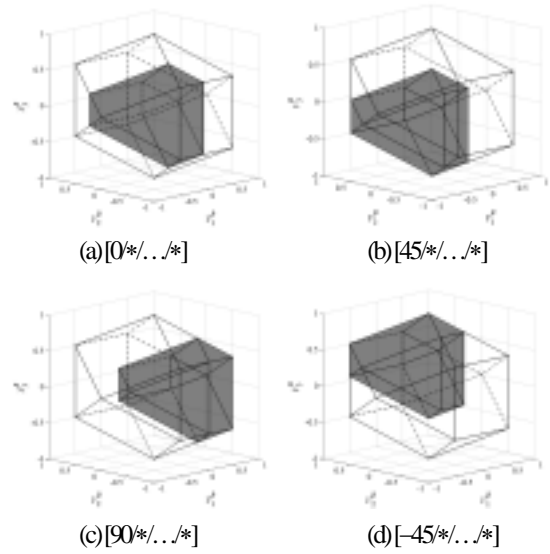


Fig. 5 Feasible region of coupling lamination parameter when $[\theta^*/\dots/\theta^*]$ of six plies.

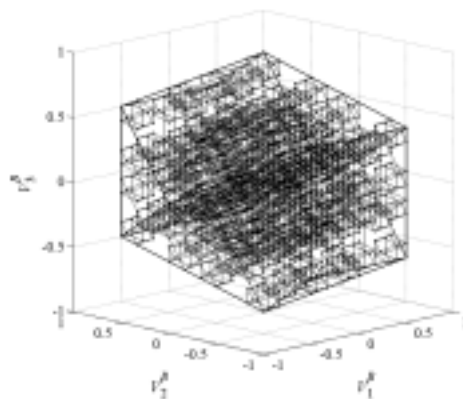


Fig. 6 Fractal tetradecahedron pattern of feasible laminates drawn by plotting all feasible laminates of six plies in coupling lamination parameters.

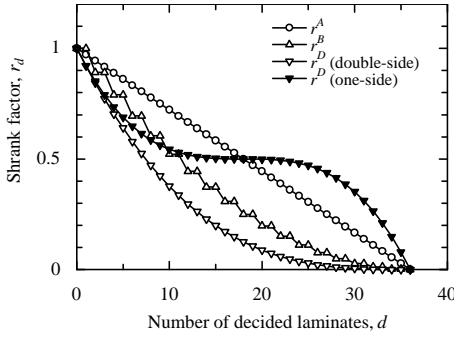


Fig. 7 Shrank factor of fractal pattern of 36 plies.

2.4 フラクタル分枝限定法 面内/面外/連成積層パラメータ, $V_{1,2,3}^A, V_{1,2,3}^B, V_{1,2,3}^D$ は外側から各層の繊維配向角が決定されるとその内側が未決定の積層板集合は, 自己相似な四面体または十四面体の面上または内部の部分集合へと収束していくため, フラクタル分枝限定法を適用することが可能である. しかし $V_{1,2,3}^B$ の場合, 奇数層繊維配向角決定済み時の集合 V^B は d の値によって変化する変則的な十四面体を描くため, その都度領域を定義する必要があり計算コストがかさむ. そこで奇数 d 層決定済みの V^B 領域は外側の偶数 ($d-1$) の十四面体領域で代替する.

フラクタル分枝限定法では各四面体または十四面体内の目的関数最大値を応答曲面法による 2 次多項式近似を用いて見積もり, 仮の最適解よりも劣る場合, 内側の四面体または十四面体フラクタル分枝における解の探索を打ち切ることができる. 反対に, 仮の最適解よりも優れている場合には, 内側のフラクタル分枝の探索を続行する. この操作を繰り返すことで, 最終的に目的関数を最大化する最適積層構成を得ることができる. フラクタル分枝限定法に関する詳細は文献 [6] に詳しい.

フラクタル分枝の安全側評価を実施するにあたって, 式(4)に式(21), (22), (37)を代入し, 最適化の目的関数を次式のように変形する.

$$\begin{aligned} f &= f(V^A, V^B, V^D) \\ &= f(V_0^A + r_d^A V_d^A, V_0^B + r_d^B V_d^B, V_0^D + r_d^D V_d^D) \\ &= f_0 + f'_{V^A} + f'_{V^B} + f'_{V^D} + f'_{V^A V^B} + f'_{V^B V^D} + f'_{V^D V^A} \end{aligned} \quad (39)$$

ただし,

$$\begin{aligned} f_0 &= f(V_0^A, V_0^B, V_0^D) \\ f'_{V^A} &= r_d^A V_d^{A^T} b'_{V^A} + (r_d^A)^2 \frac{1}{2} V_d^{A^T} [A_{V^A V^A}] V_d^A \\ f'_{V^B} &= r_d^B V_d^{B^T} b'_{V^B} + (r_d^B)^2 \frac{1}{2} V_d^{B^T} [A_{V^B V^B}] V_d^B \\ f'_{V^D} &= r_d^D V_d^{D^T} b'_{V^D} + (r_d^D)^2 \frac{1}{2} V_d^{D^T} [A_{V^D V^D}] V_d^D \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} f'_{V^A V^B} &= r_d^A r_d^B V_0^A [A_{V^A V^B}] V_0^B \\ f'_{V^B V^D} &= r_d^B r_d^D V_0^B [A_{V^B V^D}] V_0^D \\ f'_{V^D V^A} &= r_d^D r_d^A V_0^D [A_{V^D V^A}] V_0^A \\ \begin{bmatrix} b'_{V^A} \\ b'_{V^B} \\ b'_{V^D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{V^A} \\ b_{V^B} \\ b_{V^D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{V^A V^A} & A_{V^A V^B} & A_{V^A V^D} \\ A_{V^B V^A}^T & A_{V^B V^B} & A_{V^B V^D} \\ A_{V^D V^A}^T & A_{V^D V^B}^T & A_{V^D V^D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^A \\ V_0^B \\ V_0^D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで r_d はフラクタル図形の縮小率, f_0 は定数項, $f'_{V^A}, f'_{V^B}, f'_{V^D}$ はそれぞれ V^A, V^B, V^D の 2 次多項式, $f'_{V^A V^B}, f'_{V^B V^D}, f'_{V^D V^A}$ はそれぞれ V^A と V^B, V^B と V^D, V^D と V^A の交互作用項である.

ここで安全側の見積もり量 g を次のように定義する.

$$\begin{aligned} g &= f_0 + \max f'_{V^A} + \max f'_{V^B} + \max f'_{V^D} + \\ &\quad \max f'_{V^A V^B} + \max f'_{V^B V^D} + \max f'_{V^D V^A} \end{aligned} \quad (42)$$

次式が成り立つため, この g は安全側の楽観的な見積もりとなっている.

$$g \geq \max f \quad (43)$$

式(42)のそれぞれの項は, 縮小した四面体領域または十四面体領域内の最大値に相当し, 目的関数として 2 次多項式を用いることで容易に求めることができる.

本研究では, 最大値付近の近似精度を向上させるため面内/面外/連成積層パラメータ空間における隣接積層構成を実験点に追加した修正応答曲面⁽⁶⁾を使用する. 面内/面外積層パラメータ空間における隣接積層構成は文献[17]に詳しい. 連成積層パラメータにおける隣接積層構成は, 式(1), (2), (3)から積層板中央面に対称に位置する層同士を交換することで得られる. たとえば, 積層構成が [9045/450045045] であるとき, 加える積層構成は次の 3 点である.

- (1) 1 層 8 層: [45/45/450045090]
- (2) 2 層 7 層: [900450045/45/45]
- (3) 1 層 8 層, 2 層 7 層: [450450045/45/90]

ここで積層板積層数が N であるとき, 加える積層数 n_a は最大で,

$$n_a = \begin{cases} 2^{N/2} - 1 & \text{when } N \text{ is even} \\ 2^{(N-1)/2} - 1 & \text{when } N \text{ is odd} \end{cases} \quad (44)$$

となる.

3. 最適化適用例

提案した手法の有効性を確認するため、軸圧縮、外部側圧、ねじり荷重を受ける複合材料円筒殻座屈^{(18)~(21)}荷重最大化の積層構成最適化を実施した。

軸圧縮、外部側圧、ねじりを受ける複合材料円筒殻を考える(図8)。厚さ h 、長さ L 、中央面半径 R の複合材料積層円筒殻座屈の支配方程式は Flugge の理論により中央面の変位と面内剛性マトリックス $[A]$ 、連成剛性マトリックス $[B]$ 、面外剛性マトリックス $[D]$ を用いて次式で表せる⁽¹⁸⁾。

$$R^2 u_{,xx} (\bar{A}_{11} + \bar{B}_{11} - q_2) + 2Ru_{,x\phi} (\bar{A}_{16} - q_3) + u_{,\phi\phi} (\bar{A}_{66} - \bar{B}_{66} + \bar{D}_{66} - q_1) + R^2 v_{,xx} (\bar{A}_{16} + 2\bar{B}_{16} + \bar{D}_{16}) + Rv_{,x\phi} (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + \bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}) + v_{,\phi\phi} \bar{A}_{26} - R^3 w_{,xxx} (\bar{B}_{11} + \bar{D}_{11}) - R^2 w_{,xx\phi} (3\bar{B}_{16} + \bar{D}_{16}) - Rv_{,x\phi\phi} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} - \bar{D}_{66}) - w_{,\phi\phi\phi} (\bar{B}_{26} - \bar{D}_{26}) + Rv_{,x\phi} (\bar{A}_{12} + q_1) + w_{,\phi} (\bar{A}_{26} - \bar{B}_{26} + \bar{D}_{26}) = 0 \quad (45)$$

$$R^2 u_{,xx} (\bar{A}_{16} + 2\bar{B}_{16} + \bar{D}_{16}) + Ru_{,x\phi} (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + \bar{B}_{66} + \bar{B}_{12}) + u_{,\phi\phi} \bar{A}_{26} + R^2 v_{,xx} (\bar{A}_{66} + 3\bar{B}_{66} + 3\bar{D}_{66} - q_2) + 2av_{,x\phi} (\bar{A}_{26} + 2\bar{B}_{26} + \bar{D}_{26} - q_3) + v_{,\phi\phi} (1 + \bar{B}_{22} - q_1) - R^3 w_{,xxx} (\bar{B}_{16} + 2\bar{D}_{16}) - R^2 w_{,xx\phi} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + \bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{66}) - Rv_{,x\phi\phi} (3\bar{B}_{26} + 2\bar{D}_{26}) - w_{,\phi\phi\phi} \bar{B}_{22} + Rv_{,x\phi} (\bar{A}_{26} + \bar{B}_{26} - 2q_3) + w_{,\phi} (1 - q_1) = 0 \quad (46)$$

$$-R^3 u_{,xxx} (\bar{B}_{11} + \bar{D}_{11}) - R^2 u_{,xx\phi} (3\bar{B}_{16} + \bar{D}_{16}) - Ru_{,x\phi\phi} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} - \bar{D}_{66}) - u_{,\phi\phi\phi} (\bar{B}_{26} - \bar{D}_{26}) + Ru_{,x\phi} (\bar{A}_{12} + q_1) + u_{,\phi} (\bar{A}_{26} - \bar{B}_{26} + \bar{D}_{26}) - R^3 v_{,xxx} (\bar{B}_{16} + 2\bar{D}_{16}) - R^2 v_{,xx\phi} (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + \bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{66}) - Rv_{,x\phi\phi} (3\bar{B}_{26} + 2\bar{D}_{26}) - v_{,\phi\phi\phi} \bar{B}_{22} + Rv_{,x\phi} (\bar{A}_{26} + \bar{B}_{26} - 2q_3) + v_{,\phi} (1 - q_1) + R^4 w_{,xxxx} \bar{D}_{11} + 4R^3 w_{,xxx\phi} \bar{D}_{16} + 2R^2 w_{,xx\phi\phi} (\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) + 4Rw_{,x\phi\phi\phi} \bar{D}_{26} + w_{,\phi\phi\phi\phi} \bar{D}_{22} - R^2 w_{,xx} (2\bar{B}_{12} - q_2) - 2Rw_{,x\phi} (2\bar{B}_{26} - \bar{D}_{26} - q_3) - w_{,\phi\phi} (2\bar{B}_{22} - 2\bar{D}_{22} - q_1) + w(1 - \bar{B}_{22} + \bar{D}_{22}) = 0 \quad (47)$$

ここで

$$(\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}) = (1/A_{22})(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) \quad \text{with } i, j = 1, 2, 6 \quad (48)$$

$$(q_1, q_2, q_3) = (1/A_{22})(N_{x\phi}, N_\phi, N_x) \quad (49)$$

コンマは偏微分を示し、 u, v, w は中央面の x, y, z 方向の変位を示す。また $N_x, N_\phi, N_{x\phi}$ それぞれ軸方向圧縮荷重、外部側圧 ($p=N_\phi/R$)、ねじり荷重を示す。

式(45)~(47)の初期荷重は荷重 N^0 を用いて次式で表せる。

$$N_x^0 = q_x N^0, \quad N_\phi^0 = q_\phi N^0, \quad N_{x\phi}^0 = q_{x\phi} N^0 \quad (50)$$

ここで $q_x, q_\phi, q_{x\phi}$ は軸圧縮、外部側圧、ねじり荷重比を示す設定値である。式(45)~(47)は複雑な偏微分方程式であり、一般解を解くことが困難であるが、円筒殻中央面の変位を次式で仮定することで、特殊解を得ることができる。

$$\begin{aligned} u &= U \sin[(\lambda x/R) + n\theta] \\ v &= V \sin[(\lambda x/R) + n\theta] \\ w &= W \sin[(\lambda x/R) + n\theta] \end{aligned} \quad (51)$$

ここで、 U, V, W は定数、 $\lambda = m\pi R/L$ 、 n は円周方向波数、 m は軸方向の半波数である。式(51)は単純支持、

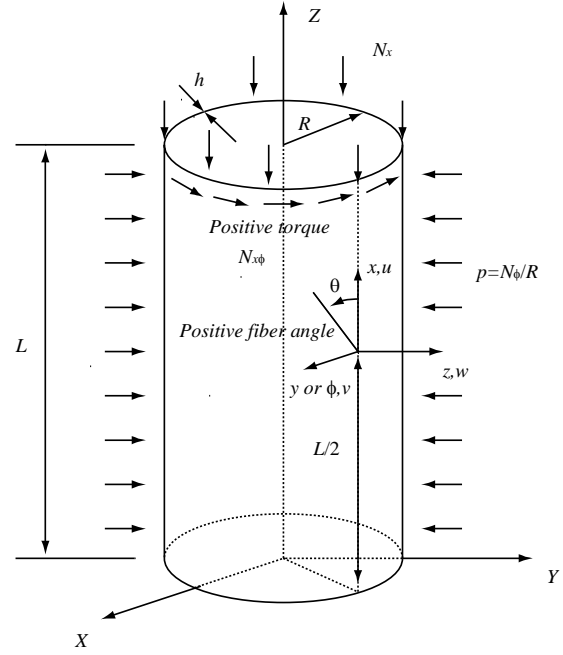


Fig. 8 Geometry of the laminated composite cylindrical shell.

固定支持といった端部境界条件を満たさないが、円筒角長さが半径と比較して十分大きい ($L \gg R$) 場合、端部境界条件は座屈荷重値に大きな影響は及ぼさないと考える⁽¹⁸⁾。さらに式(51)を式(45)~(47)に代入することで次式を得る。

$$[C] \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = 0 \quad (52)$$

ここで C は代入より得られる係数行列である。式(45)~(47)が自明な解以外の解を持つことから、

$$|C| = 0 \quad (53)$$

$q_x, q_\phi, q_{x\phi}$ が与えられているとき、式(53)を解くことにより、座屈荷重 N_G が求まる。

複合材料としては CFRP を想定し、解析に用いた材料物性値は $E_{11}/E_{22}=20$ 、 $G_{12}/E_{22}=0.6$ 、 $\nu_{12}=0.25$ である。円筒殻は半径長さ比 $L/R=120$ 、厚さ半径比 $R/h=20$ を用いた。座屈荷重は次式に示す規格化座屈荷重パラメータを用いる⁽¹⁵⁾。

$$\bar{N} = N_{cr}/E_{22}h \times 10^3 \quad (54)$$

したがって、軸圧縮、外部側圧、ねじり荷重を受ける複合材料円筒殻の規格化座屈荷重は次式となる。

$$\bar{N}_x = q_x \bar{N}, \quad \bar{N}_\phi = q_\phi \bar{N}, \quad \bar{N}_{x\phi} = q_{x\phi} \bar{N} \quad (55)$$

ここでは例としてねじり荷重のみの場合 ($q_x = q_\phi = 0$ 、 $q_{x\phi} = 1$) を取り上げる。積層板の全積層数は 12 層とし、繊維配向角は $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ に限定した。

D 最適基準を用いて選択した 110 点の積層構成の積層パラメータ $V^{ABD}_{1,2,3}$ を用いて作成した応答曲面の自由度調整済み決定係数は 0.972 と良好である。この応答曲面を用いて提案したフラクタル分枝限定法を実施し得られ

最適積層構成は $[90_3 0_4 / -45_3 90_2]$ であり，座屈荷重パラメータの値は 37.67 である．積層パラメータ空間における周辺の解析を実施して得られた真の最適積層構成は $[90_3 0_3 / -45_2 90_2]$ であり，座屈荷重パラメータの値は 38.55 である．真の最適解との相対誤差は 2.28% であり実用上許容できる．

軸圧縮，外部側圧，ねじり荷重比を変化させて積層構成最適化実施した結果を表 1 に示す．表 1 の q_x, q_ϕ, q_ψ はそれぞれ，軸圧縮，外部側圧，ねじり荷重の比を示す．提案した手法を用いることで真の最適積層構成からの誤差 2.28% 以内で実用上許容できる最適積層構成が得られた．計算時間のオーダーはフラクタル分枝限定法で $O(1.59^N)$ ，総当り探索では $O(4^N)$ であった．

Table 1 Optimization results

Loading ratio			Laminate Config.	Parameter N	Error (%)	
q_x	q_ϕ	q_ψ				
1	0	0	Fbbm	$[0_8]$	6.19	0.00
			Opt	$[0_8]$	6.19	
0	1	0	Fbbm	$[90_4 0_2 90_4]$	12.49	-0.44
			Opt	$[90_3]$	12.54	
0	0	1	Fbbm	$[90_3 0_4 / -45_3 90_2]$	37.67	-2.28
			Opt	$[90_3 0_3 / -45_2 90_2]$	38.55	
1	0.5	0	Fbbm	$[90 0_{10} / 90]$	6.98	0.00
			Opt	$[90 0_{10} / 90]$	6.98	
0.1	0	1	Fbbm	$[90_2 0_8 90_2]$	31.57	-1.63
			Opt	$[90_2 0_7 / 45 / -45 90]$	32.09	
0	0.05	1	Fbbm	$[90_3 0_4 / -45_3 90_3]$	34.24	-0.52
			Opt	$[90_4 0_4 / -45 90_3]$	34.42	
0.1	0.05	1	Fbbm	$[90_3 0_6 / -45 90_2]$	33.03	0.00
			Opt	$[90_3 0_6 / -45 90_2]$	33.03	

4. 結 言

複合材料積層構成最適化において，非対称積層板の積層パラメータのフラクタル性に基づいて非対称積層板に適用可能な拡張フラクタル分枝限定法を提案した．本研究では，提案した拡張フラクタル分枝限定法を軸圧縮，外部側圧，ねじりの組み合わせ荷重による複合材料円筒殻の座屈問題に適用し，有効性を検証した．得られた結果は以下のとおりである．

- (1) 非対称積層板の面内/面外積層パラメータ空間が四面体フラクタル構造を描き，連成積層パラメータ空間が十四面体フラクタル構造を描くことを明らかにした．

- (2) 非対称積層板の面内/面外/連成積層パラメータが描くフラクタル構造を利用し，フラクタル分枝限定法が適用できることを示した．
- (3) 提案した非対称積層板に適用可能な拡張フラクタル分枝限定法を用いることで，軸圧縮，外部側圧，ねじり組み合わせ荷重による複合材料円筒殻座屈問題に対して実用上許容できる最適積層構成が得られることを示した．

文 献

- (1) Miki, M., *ASTM STP*, **846** (1985), 387-400.
- (2) Fukunaga, H. and Chou, T. W., *J. Compos. Mater.*, **22**, (1998) 1156-1169.
- (3) Todoroki, A. and Haftka, R. T., *Compos. B*, **29B**, (1998), 277.
- (4) Todoroki, A. and Ishikawa, T., *Compos. Struct.*, **64** (2004), 349-357.
- (5) Liu, B., Haftka, R. T., Akgiin, M. A. and Todoroki, A., *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **186** (2000), 357-372.
- (6) Todoroki, A. and Terada, Y., *AIAA J.*, **42**-1 (2004), 141-148.
- (7) 平野義鎮, 轟章, 日本計算工学論文集, **5** (2003), 155-160.
- (8) 平野義鎮, 轟章, 日本複合材料学会, **29**-3 (2003), 98-105.
- (9) Walker, M., Reiss, T. and Adali, S., *Comput. Struct.*, **62**-2 (1997), 237-242.
- (10) Onoda, J., *AIAA J.*, **23**-7 (1985), 1093-1098.
- (11) Diaconu, C. G., Sato, M. and Sekine, H., *Compos. Struct.*, **58** (2002), 423-433.
- (12) Diaconu, C. G., Sato, M. and Sekine, H., *AIAA J.*, **40**-3 (2002), 559-565.
- (13) Myers, R. H. and Montgomery, D. C., *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, (1995) John Wiley & Sons. Inc.
- (14) Narita, Y. and Hodgkinson, J. M., *Composite Structures*, **69** (2005), 127-135.
- (15) Diaconu, C. G., Sato, M. and Sekine, H., *AIAA J.*, **42**-10 (2004), 2153-2163.
- (16) Todoroki, A., Suenaga, K. and Shimamura, Y., *Adv. Compos. Mater.*, **12**-1 (2003), 35-55.
- (17) Todoroki, A. and Sasai, M., *Adv. Compos. Mater.*, **11**-3 (2003) 299-318.
- (18) Cheng, S. and Ho, B. P. C., *AIAA J.*, **1**-4 (1963), 892-898.
- (19) Ho, B. P. C. and Cheng, S., *AIAA J.*, **1**-7 (1963), 1603-1607.
- (20) Booton, M. and Tennyson, R. C., *AIAA J.*, **17**-3 (1979), 278-287.
- (21) Meyer-Piening, H. R., Farshad, M., Geier B. and Zimmermann, R., *Compos. Struct.*, **53** (2001), 427-435.