

フラクタル分枝限定法を用いた複合材料積層板の積層構成最適化*

寺田 雄一郎*¹ 轟 章*² 島村 佳伸*²

Stacking Sequence Optimizations using Fractal-Branch and Bound Method for Laminated Composites

Yuichiro TERADA Akira TODOROKI Yoshinobu SHIMAMURA

Present study shows the mechanism of the fractal branches of the stacking sequence of laminated composites, and proposes a novel approach for stacking sequence optimizations named Fractal-branch and bound method. The method is limited to the stacking sequence optimizations that can be computed only by out-of-plane lamination parameters. First, values of the objective function are approximated by response surfaces as functions of the out-of-plane lamination parameters using the design of experiments and the least square method, and the optimal set of lamination parameters is obtained. After that, a set of candidates of optimal stacking sequences is collected using branch-and-bound method near the optimal point of the set of lamination parameters. All of the candidates examined and the real optimal stacking sequence is obtained. The fractal-branch and bound method is applied to the stacking sequence optimization problems for a maximization of buckling load of a simply supported rectangular plate, and the method obtained the exact optimal stacking sequence by very small computational cost.

Key Words : Composite, Stacking Sequence, Lamination Parameter, Response Surface, Fractal, Design, Optimization, Branch and Bound

1. 緒言

複合材料積層板は積層構成によって剛性・強度が大きく変化することから最適設計が必要不可欠である。実際の構造物では実験値の入手困難や製造上の理由から繊維配向角が限定されることが多い。このため積層構成の最適設計はたとえば $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ などの限定された繊維配向角の組合せ最適化問題となる。積層構成最適設計には媒介変数として積層パラメータを用いるのが効率的であることが示されている⁽¹⁾⁽²⁾。しかし積層構成に対して積層パラメータが著しい多峰性を示すために、積層パラメータから直接積層構成を求めることが困難である。そのためGAなどの確率的な探索手法が適用されてきた^{(3)~(12)}。また、Haftkaらは矩形平板の座屈荷重の解析式を用いて設計変数に対して線形な式として定式化し、整数計画法を適用した⁽¹³⁾。著者らの一部はスーパープライを用いた分枝限定法を提案した⁽¹⁴⁾。

これらのアルゴリズムは決定論的に解が得られるが、解析式を必要とするか、または枝の限定が効率的でなく解析に時間を要するものであった。本研究では、繊維配向角が $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ に限定された実用的な積層構成の集合が面外積層パラメータ空間上でフラクタル図形を描くことを発見した。また、積層構成の外側の層からの探索がフラクタル分枝を有していることに注目して分枝限定法を利用することで、面外積層パラメータだけが関連する一般的な曲げやねじりの問題に対して有効な方法を提案している。この方法では、面外積層パラメータ空間内で実験計画法に基づいて解析を実施し、

目的関数値を応答、面外積層パラメータを変数とする応答曲面を作成する。作成した応答曲面からは最適な積層パラメータの組が得られる。その最適積層パラメータの組近傍の実現可能積層構成をフラクタル分枝限定法で求め、求めた実現可能積層構成の集合で解析を実施し、真の最適解を求める。本研究では四辺単純支持の矩形積層板の座屈荷重最大化積層構成最適化問題を例にその有効性を示している。

2. 最適化問題

2.1 積層平板の座屈 本研究で提案するフラクタル分枝限定法は、面外積層パラメータだけに依存するすべての問題に適用可能であるが、本研究では最適性の実証が可能な簡便な例題として、図1に示す矩形対称積層板の座屈荷重最大化積層構成最適化問題を扱う。長さ a 、幅 b の矩形積層平板に参照荷重 N_x, N_y の λ 倍、すなわち $\lambda N_x, \lambda N_y$ が負荷されている。 λ は比例荷重係数である。 λ が限界値 λ_{cr} に達したときに積層板は座屈する。この限界値 λ_{cr} の最大化を目的として積層構成を最適化する。

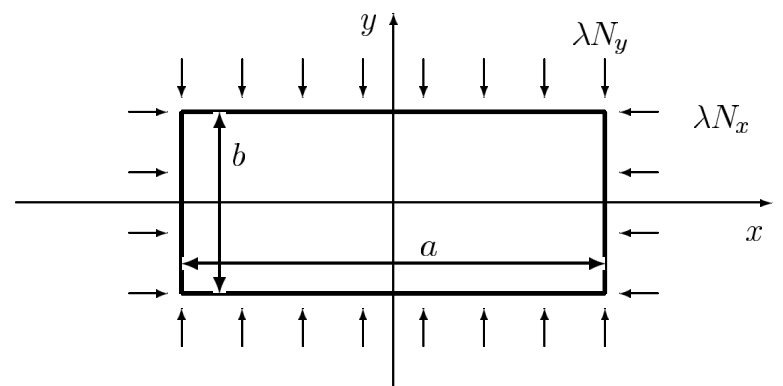


Fig. 1 Composite plate under compression loads

* 原稿受付 年 月 日

*¹ 学生員，東京工業大学大学院機械物理工学専攻（〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1） yterada@ginza.mes.titech.ac.jp

*² 正員，東京工業大学工学部

座屈荷重最大化は曲げ剛性だけに依存する。比例荷重係数の限界値 λ_{cr} は曲げ剛性 D_{ij} を用いて次式で与えられる。

$$\lambda_{cr} = \pi^2 \frac{D_{11}(m/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m/a)^2(n/b)^2 + D_{22}(n/b)^4}{N_x(m/a)^2 + N_y(n/b)^2} \quad (1)$$

ここで m, n はそれぞれ x, y 方向の座屈半波長の数である。 m, n の値は λ_{cr} が最小となる組み合わせを選択する。

上記の解析式は積層板の直交異方性を仮定している。よって、曲げ-ねじりカップリング剛性 D_{16}, D_{26} が大きい場合には正確ではない。曲げ-ねじりカップリングの影響は、次式で示される異方性パラメータ γ, δ が $\gamma, \delta < 0.2$ の場合には無視できる⁽¹⁵⁾。

$$\gamma = \frac{D_{16}}{(D_{11}^3 D_{22})^{1/4}} \quad \delta = \frac{D_{26}}{(D_{22}^3 D_{11})^{1/4}} \quad (2)$$

本研究で適用した積層構成最適化問題の拘束条件を以下に示す。

1. 繊維配向角は $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ から選択される
2. 対称積層板
3. 各プライの厚さは一定
4. アングルプライ ($\pm 45^\circ$) はバランス
5. 同一繊維配向角の連続は4層まで (巨大マトリックス割れの防止)
6. 異方性パラメータ $\gamma, \delta < 0.2$

本研究で用いた矩形積層平板の寸法は $a = 0.5\text{m}, b = 0.1\text{m}$ である。参照荷重は $N_x = 175\text{N/m}, N_y = 50\text{N/m}$ である。また各プライの厚さは 0.125mm である。用いた材料 T300/Epoxy の力学的特性を表 1 に示した。

Table 1 Elastic modulus of T300/epoxy

E_x	181GPa
E_y	10.3GPa
E_s	7.17GPa
ν_{xy}	0.28

2.2 積層パラメータ 積層板の曲げ剛性 D_{ij} は面外積層パラメータ W_i^* を用いて次式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} U_1 & W_1^* & W_2^* \\ U_1 & -W_1^* & W_2^* \\ U_4 & 0 & -W_2^* \\ U_5 & 0 & -W_2^* \\ 0 & \frac{1}{2}W_3^* & W_4^* \\ 0 & \frac{1}{2}W_3^* & -W_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで h は板厚、 U_i は材料定数である⁽¹⁶⁾。面外積層パラメータ W_i^* は次式で定義される⁽¹⁶⁾。

$$\mathbf{W}^* = \begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_4^* \end{bmatrix} = \frac{24}{h^3} \int_0^{h/2} z^2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta(z) \\ \cos 4\theta(z) \\ \sin 2\theta(z) \\ \sin 4\theta(z) \end{bmatrix} dz \quad (4)$$

ここで z は板厚中央を原点とする板厚方向座標、 $\theta(z)$ は z の位置のプライにおける繊維配向角である。各プライの厚さは一定であるので、片側積層数を N 、外側から k 層目の繊維配

向角を θ_k と置くと、面外積層パラメータの式は次式のように積和へ書きかえられる。

$$\mathbf{W}^* = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \\ \sin 2\theta_k \\ \sin 4\theta_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$a_k = \frac{(N - k)^3}{N^3} \quad (6)$$

積層パラメータ \mathbf{W}^* は板厚 h や材料定数 U_i とは無関係であり、積層構成 θ_k のみに依存する。すなわち、曲げ剛性マトリックス D_{ij} から積層構成のみに依存する部分を抽出した値である。本研究で最適化の対象とするのは積層構成であるから、目的関数 λ_{cr} は D_{ij} の代わりに W_i^* を変数として記述することができる。拘束条件の6が有効であれば式(1)と式(3)より W_3^*, W_4^* は λ_{cr} に寄与しないため、 λ_{cr} の計算には W_1^*, W_2^* の2つを考慮すれば十分である。

本研究では繊維配向角 θ_k は $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ に限定している。この時、式(5)右辺における三角関数の値は次の表のようになる。

Table 2 Values of trigonometric functions

θ_k	0°	45°	90°	-45°
$\cos 2\theta_k$	1	0	-1	0
$\cos 4\theta_k$	1	-1	1	-1
$\sin 2\theta_k$	0	1	0	-1
$\sin 4\theta_k$	0	0	0	0

この結果から W_4^* を生じる $\sin 4\theta_k$ は常に0であり、 $W_4^* = 0$ であることがわかる。しかし、 W_3^* は一般には0ではないため、曲げ-ねじりカップリング剛性 D_{16}, D_{26} も一般には0ではない。本研究では拘束条件として、異方性パラメータ γ, δ が0.2を超える積層構成は解の候補から除外している。

なお、 $\pm 45^\circ$ 層はバランスさせるという拘束条件を課しているため、 45° 層と -45° 層が打ち消しあって W_3^* は多くの場合、0に近い値となる。そのため、 γ, δ が0.2を超えることは滅多にない。

2.3 応答曲面法による近似 先にも述べたように、本研究で提案するフラクタル分枝限定法による積層構成最適化では、目的関数を面外積層パラメータを変数として応答曲面で近似し、最適積層パラメータを求める必要がある。応答曲面法とは、実験計画法と最小二乗法を組み合わせることにより、限られたデータ数から効率よく応答の近似式を得る手法である⁽¹⁷⁾。本研究では応答曲面法により W_1^*, W_2^* を変数として限界座屈荷重比 λ_{cr} の応答を2次多項式に近似した。平板の座屈荷重は W_1^*, W_2^* の2次多項式で十分に近似できることがすでに示されている⁽¹²⁾。また、3.3節で述べる近接領域の定義に関しても応答曲面が2次多項式であると都合が良い。実験計画は著者らの一部が既にGAによる積層構成最適化で用いたD最適基準⁽¹²⁾に基づいて実行した。本研究では例題として解析式が与えられている単純な矩形の問題を扱っているが、応答曲面はたとえばFEM解析を必要とする複雑形状の問題に対しても作成可能である。

式(1)で与えた λ_{cr} は片側積層数 N の3乗に比例する。積層数に依らない応答曲面を作成するために、次の基準化限界

座屈荷重比について応答曲面を作成した.

$$\lambda'_{cr} = \frac{\lambda_{cr}}{N^3} \quad (7)$$

λ'_{cr} について次式のような2次多項式が得られる.

$$\lambda'_{cr} = \beta_0 + \beta_1 W_1^* + \beta_2 W_2^* + \beta_{11} W_1^{*2} + \beta_{12} W_1^* W_2^* + \beta_{22} W_2^{*2} \quad (8)$$

この2次式は次のように書き換えられる.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12}/2 \\ -\beta_{12}/2 & -\beta_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\lambda'_{cr} = \beta_0 - \mathbf{W}^{*T} \mathbf{b} - \mathbf{W}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{W}^*$$

係数 $\beta_0, \mathbf{b}, \mathbf{B}$ の不偏推定値はD最適基準で選択された (W_1^*, W_2^*) の12通りの組み合わせから最小二乗法で計算される.

2.4 最適積層パラメータ 最適な積層パラメータは座屈荷重比 λ'_{cr} に最大値を与える面外積層パラメータであり \mathbf{W}_{op}^* と表すことにする. λ'_{cr} が上に凸な曲面となるのは次のような場合である.

$$\det(\mathbf{B}) > 0, \quad \text{tr}(\mathbf{B}) > 0 \quad (10)$$

上に凸な曲面で積層パラメータに制限がない場合, λ'_{cr} は以下の点で最大値をとる.

$$\mathbf{W}_{op}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (11)$$

積層パラメータとして \mathbf{W}_{op}^* を有する積層構成が最適積層構成である. しかし, 面外積層パラメータは連続変数であるのに対して積層構成は離散的であるから, 一般に \mathbf{W}_{op}^* を有する積層構成は存在するとは限らない. また繊維配向角が $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ に限定されている場合, 実際の面外積層パラメータは点 $(W_1^*, W_2^*) = A(1,1), B(-1,1), C(0,-1)$ を頂点とする三角形の内部にしか存在しない. そこで \mathbf{W}_{op}^* に近い積層パラメータを有する積層構成の集合を探索し, その中から真の最適解を求めることになる.

3. フラクタル分枝限定法

3.1 フラクタル分枝 積層構成が与えられる場合, 式(5)を用いて面外積層パラメータを計算できる. しかし積層構成の最適化においては, 逆に面外積層パラメータから積層構成を求める必要が生じ, これは一般に困難である. 本研究では W_1^*, W_2^* 平面上における設計空間のフラクタル構造を解明した結果, 効率的にこの問題を解くことが可能となった. 初めにフラクタル構造を示す.

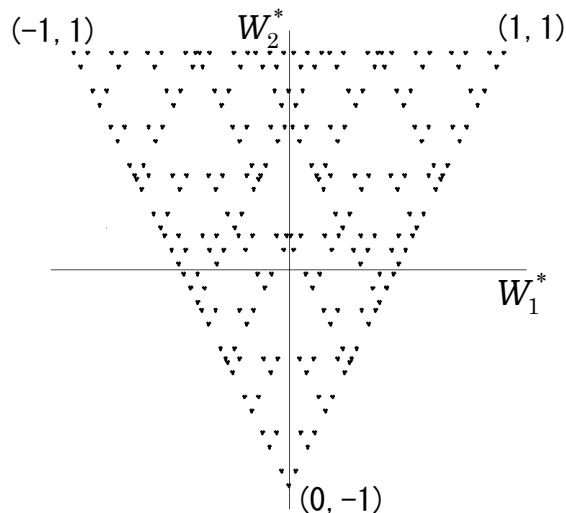


Fig. 2 Entire fractal design space on out-of-plane lamination parameters (6plies)

片側6plyのすべての積層構成の面外積層パラメータを $W_1^* W_2^*$ 平面上に示した結果を図2に示す. 積層構成全体の集合は $W_1^* W_2^*$ 平面上で三角形の内側となる. 図から明らかなように, 多くの自己相似の三角形が重なり合ったフラクタル構造となっている.

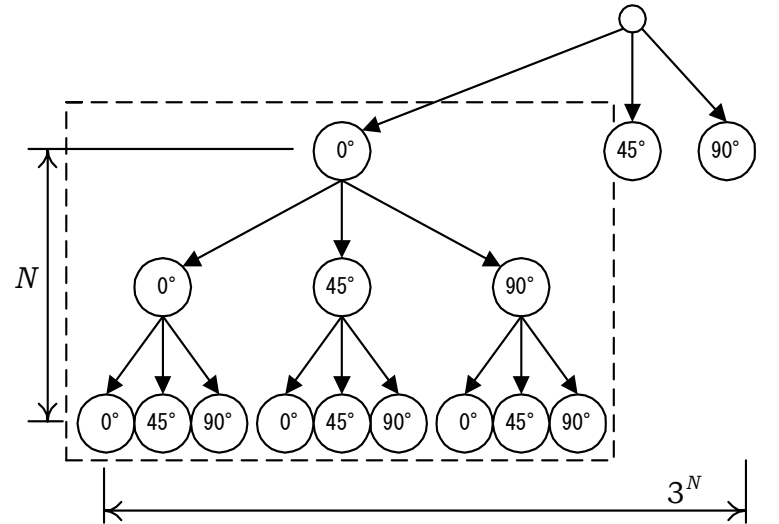


Fig. 3 Tree structure of stacking sequence

積層構成の集合は図3に示す木構造をなす. 各積層構成は木構造の各枝に対応している. 図からも明らかなように片側積層数を N とすると積層構成は全部で 3^N 通り存在する. ただしここでは積層構成を $0, 45, 90$ の3つの数で表示し, 外側から数えて奇数番目の45を $+45^\circ$ 層, 偶数番目の45を -45° 層と読む. この積層構成の集合全体を $W_1^* W_2^*$ 平面上に図示した結果が図2である.

初めに積層構成全体が三角形に射影されることを示す. 式(5)で示したように W_1^*, W_2^* は次式で与えられる.

$$\mathbf{W}^* = \begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで表2より三角関数のとり得る値は限定されている.

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

すなわち, \mathbf{W}^* は $(1, 1), (0, -1), (-1, 1)$ の線形和として次式のように表すことができる.

$$\mathbf{W}^* = s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s_{90} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで s_0, s_{45}, s_{90} は0以上の実数であり, 式(6),(12),(14)から次の関係が成り立つ.

$$s_0 + s_{45} + s_{90} = \sum_{k=1}^N (a_{k-1} - a_k) = 1 \quad (15)$$

式(15)はベクトル \mathbf{W}^* が $(1, 1), (0, -1), (-1, 1)$ を頂点とする三角形の領域内の点となることを示している.

次に, 図3の破線で囲まれた枝の部分, すなわち 0° 層から始まる積層構成の \mathbf{W}^* 平面への射影を考える. この場合 $\theta_1 = 0^\circ$ であるから式(12)より \mathbf{W}^* は次式となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^* &= (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=2}^N (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \end{bmatrix} \\ &= (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s_{90} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$s_0 + s_{45} + s_{90} = \sum_{k=2}^N (a_{k-1} - a_k) = a_1 \quad (17)$$

これより \mathbf{W}^* は以下の3点を頂点とする三角形の領域である。

$$\begin{aligned} (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \\ (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

ここで $a_0 = 1$ であり、片側6プライの場合には $a_1 = (5/6)^3 = 0.5787$ である。この三角形と積層構成の対応関係を図4に示した。

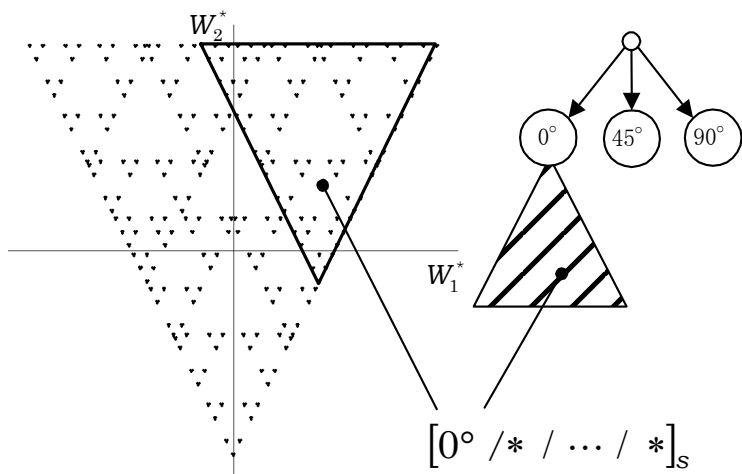


Fig. 4 Correspondence of triangle and branch of laminate

一般に、積層構成の木構造(図3)における枝と \mathbf{W}^* の関係を導出する。積層の枝は次のような積層構成の部分集合として表現できる。

$$[\theta_1 / \dots / \theta_d / * / \dots / *]_s \quad (18)$$

ただし*は任意の繊維配向角を表す。この積層構成の面外積層パラメータ W_1^*, W_2^* は次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^* &= \sum_{k=1}^d (a_{k-1} - a_k) \begin{bmatrix} \cos 2\theta_k \\ \cos 4\theta_k \end{bmatrix} \\ &+ s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{45} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s_{90} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

$$s_0 + s_{45} + s_{90} = \sum_{k=d+1}^N (a_{k-1} - a_k) = a_d \quad (20)$$

同様に \mathbf{W}^* は、式(19)において s_θ をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_{45} \\ s_{90} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ a_d \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_d \end{bmatrix}$$

としたときの点を頂点とする三角形内部の点となる。このことから、図3のすべての枝に自己相似の三角形が対応していることがわかる。これらの三角形をすべて描画すると図5のような自己相似の三角形に埋め尽くされるフラクタル構造となる。フラクタル次元は積層数に依存して変化する。フラクタル次元は積層構成最適化に無関係であるのでここではボックスカウンティング法で求められた2つの例だけを示す。

図のように枝に対応する三角形がフラクタルを形成することから、本研究ではこれらの三角形領域をフラクタル分枝 (Fractal-branch) と呼ぶことにする。 $[\theta_1 / \dots / \theta_d / * / \dots / *]_s$ に対応するフラクタル分枝を便宜上以下のような記号で表すことにする。

$$\mathcal{FB}[\theta_1 / \dots / \theta_d / * / \dots / *] \quad (21)$$

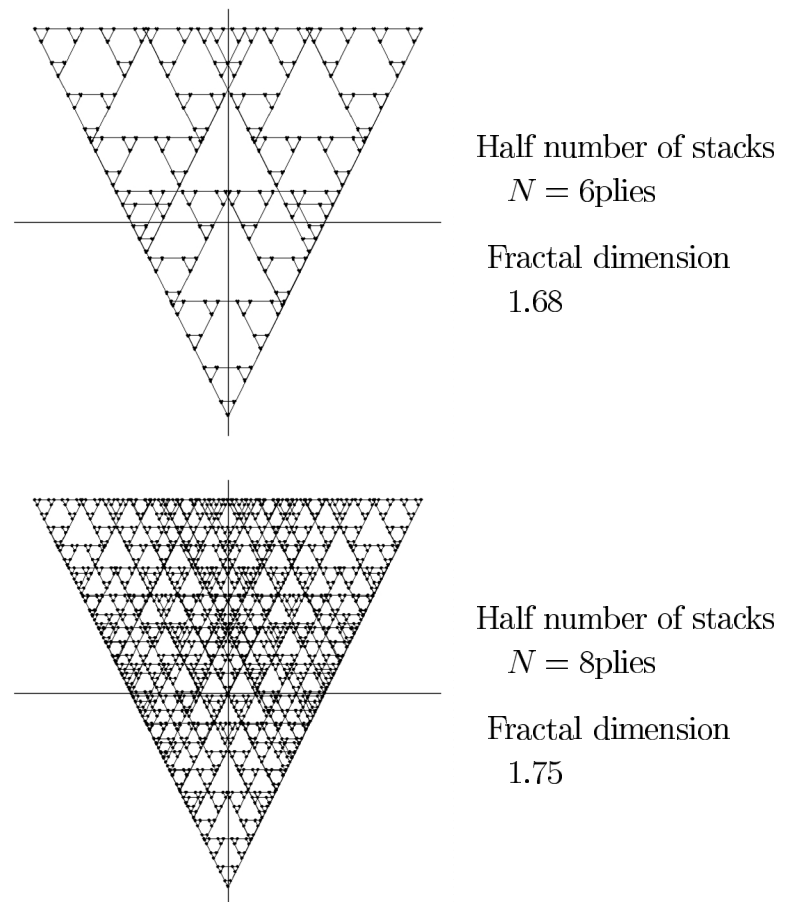


Fig. 5 Fractal structure of design space

3.2 分枝限定法 前節のフラクタル分枝を用いた分枝限定法⁽¹⁸⁾による積層構成の最適化手法について説明する。本手法はフラクタル分枝 (Fractal-branch) を利用した分枝限定法 (Branch and bound) であるため、本研究ではこれをフラクタル分枝限定法 (Fractal-branch and bound method) と呼ぶ。

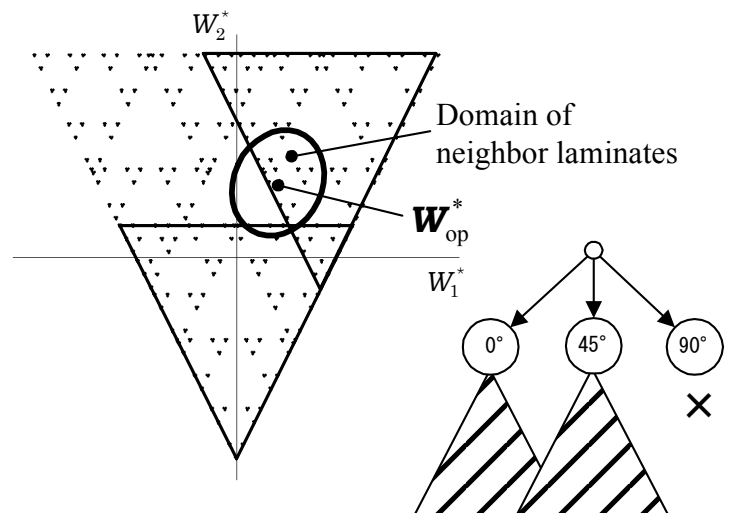


Fig. 6 Fractal-branch and bound (initial bounding)

既に述べたように、面外積層パラメータ \mathbf{W}_{op}^* が最適積層パラメータであるが、積層構成は限定された空間内の離散点であるため、 \mathbf{W}_{op}^* を持つ積層構成は必ずしも存在しない。そこで本研究では、図6のように \mathbf{W}_{op}^* の周囲に近接領域 \mathcal{D} を定義し、その領域に含まれる積層構成を求める。この近接領

域の定義については後ほど詳述する. 図6において近接領域 \mathcal{D} と交わりのあるフラクタル分枝は以下の2つである.

$$\begin{aligned} & \mathcal{FB}[0/*/\dots/*] \\ & \mathcal{FB}[45/*/\dots/*] \end{aligned} \quad (22)$$

逆に $\mathcal{FB}[90/*/\dots/*]$ は近接領域との交わりがないため, その中には最適解が含まれない.

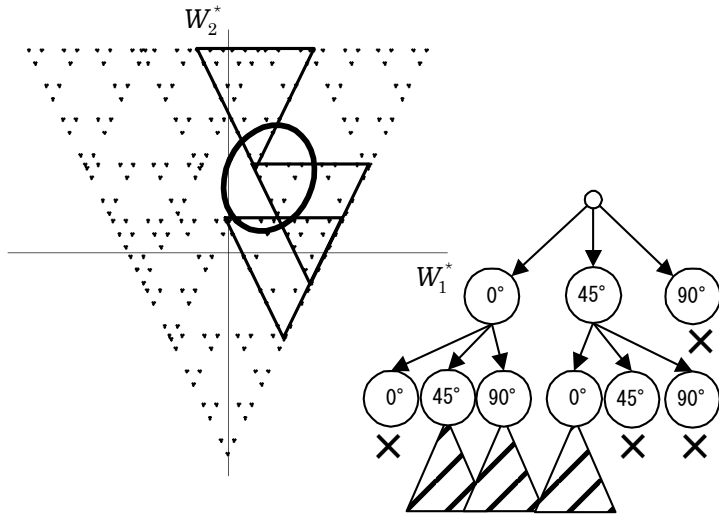


Fig. 7 Trimming of fractal-branch

さらに下位のフラクタル分枝と近接領域との交わりを調べると図7のようになる. この時点で候補に残っているフラクタル分枝は以下の3つである.

$$\begin{aligned} & \mathcal{FB}[0/45/*/\dots/*] \\ & \mathcal{FB}[0/90/*/\dots/*] \\ & \mathcal{FB}[45/0/*/\dots/*] \end{aligned} \quad (23)$$

このように枝刈りをして候補を絞り込んでいくと, 最終的には W_{op}^* 近接領域に含まれる積層構成の集合がすべて求められる. これらの積層構成を総当り的に評価することで最適な積層構成を決定することができる. 以下にフラクタル分枝限定法のフローチャートを示す.

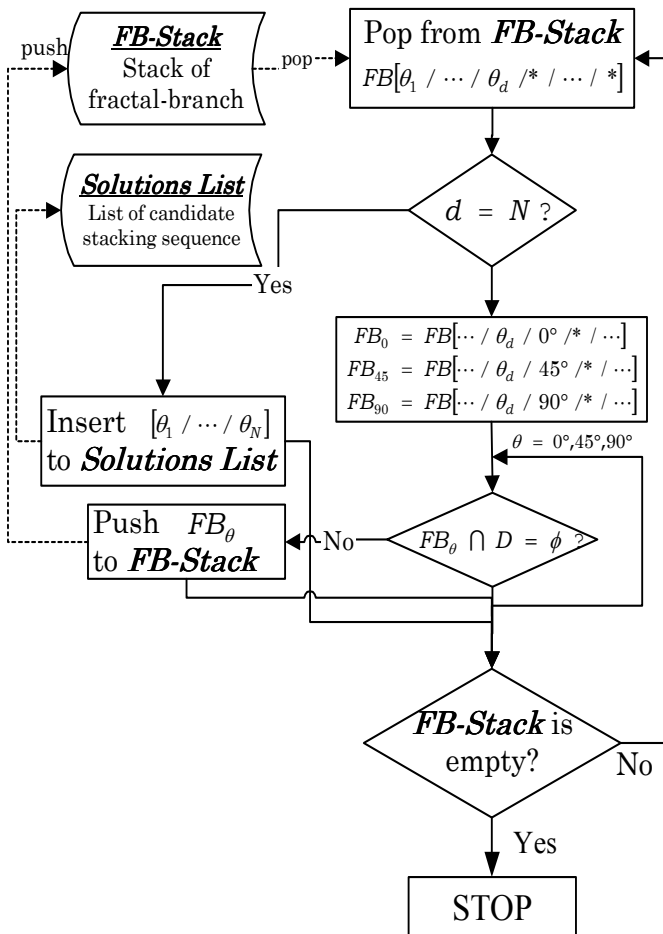


Fig. 8 Flow chart of fractal-branch and bound

実際の作業ではまず初期化処理として以下の2つを実行する.

1. 候補に残ったフラクタル分枝を格納するスタック領域 $FB-Stack$ と, \mathcal{D} に含まれる積層構成を格納するリスト $Solutions List$ の2つの記憶領域を用意する
2. 設計空間全体 $\mathcal{FB}[*/\dots/*]$ を $FB-Stack$ に push する

次に以下の作業を繰り返す.

1. $FB-Stack$ からフラクタル分枝 $\mathcal{FB}[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]$ を pop する
2. $d = N$ ならそのフラクタル分枝は \mathcal{D} に含まれる積層構成を表すので, 拘束条件に違反していなければその積層構成を応答曲面で評価した後 $Solutions List$ に降順になるように挿入する
3. $d \neq N$ なら $\mathcal{FB}[\theta_1/\dots/\theta_d/*/\dots/*]$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{FB}_0 &= \mathcal{FB}[\theta_1/\dots/\theta_d/0/*/\dots/*] \\ \mathcal{FB}_{45} &= \mathcal{FB}[\theta_1/\dots/\theta_d/45/*/\dots/*] \\ \mathcal{FB}_{90} &= \mathcal{FB}[\theta_1/\dots/\theta_d/90/*/\dots/*] \end{aligned}$$

と3つに分岐させる

4. $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ について

- (a) \mathcal{FB}_θ の積層構成が拘束条件に違反していれば \mathcal{FB}_θ を破棄
 - (b) \mathcal{FB}_θ が \mathcal{D} と交わりがなければ \mathcal{FB}_θ は破棄
 - (c) \mathcal{FB}_θ が \mathcal{D} と交わりがあれば \mathcal{FB}_θ を $FB-Stack$ に push
5. $FB-Stack$ が空でなければ3から6を繰り返す

探索が終了した時点で $Solutions List$ の先頭にある積層構成が最適積層構成である.

なお説明の便宜上, 本節の前半では木構造の探索順序を幅優先探索⁽¹⁸⁾として説明したが, 上記のフローチャートでは深さ優先探索⁽¹⁸⁾となる. 一般にメモリ消費量の観点からは幅優先探索よりも深さ優先探索のほうが有利である.

3.3 近接領域の定義 近接領域は以下を満たすことが望ましい.

1. 1つ以上の積層構成を内に含むこと
2. 面積ができるだけ小さいこと
3. 評価関数 (応答曲面) の等高線と同じ形状であること

1は必ず満たすべき条件であるのに対し, 2,3は必ずしも必要ではない. 2は, 面積が小さいほうが候補が絞り込めるため計算コストの面で有利であるためであり, 面積が大きくても解の質には問題がない. 3については, 一般に離散的問題では, 連続変数に置き換えた際の最適点近傍が最適解とは限らない. これは近傍という判定が同心円の評価関数を有しているためである. そこで \mathcal{D} に含まれる積層構成の中に必ず評価関数を最大とする積層構成が含まれているようにするための条件として, 応答曲面の等高線と同じ形状となるように近傍を定義する. ただし, \mathcal{D} に十分な数の積層構成が含まれていれば支障が出ないことが多い. 本研究のように応答曲面として2次多項式を用いている場合には等高線の形状は楕円となる. 図9に近接領域の例を示した.

式(23)から λ_{cr}^T の等高線は次式のような楕円となる.

$$W^{*T} B W^* + W^{*T} b = \text{const} \quad (24)$$

3の要求を満たすために、近接領域 \mathcal{D} を次式のように定義する。

$$(\mathbf{W}^* - \mathbf{W}_{\text{op}}^*)^T B (\mathbf{W}^* - \mathbf{W}_{\text{op}}^*) \leq r^2 \quad (25)$$

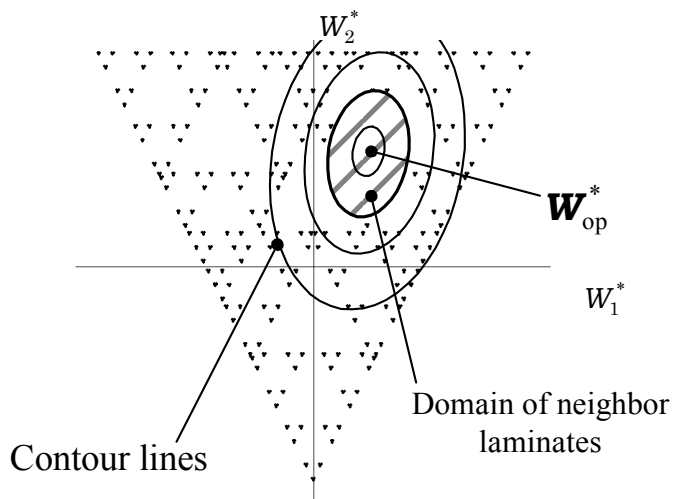


Fig. 9 Domain of neighbor laminates of \mathbf{W}_{op}^*

ここで、 \mathbf{W}^* 平面上での内積・ノルムを次のように定義する。

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_a, \mathbf{w}_b)_B &= \mathbf{w}_a^T B \mathbf{w}_b \\ \|\mathbf{w}_a\|_B^2 &= \mathbf{w}_a^T B \mathbf{w}_a \end{aligned} \quad (26)$$

このとき行列 B は計量行列 (metric matrix) と呼ばれる(19)。上記の内積を用いると \mathcal{D} は次式のように円領域の式に書き換えられる。

$$\|(\mathbf{W}^* - \mathbf{W}_{\text{op}}^*)\|_B^2 \leq r^2 \quad (27)$$

さて、上記の円領域の半径 r を 1,2 の要求を満たすように決定したいが、 \mathbf{W}^* 平面上における設計可能点の分布は密な部分と疎な部分があり、簡単には決定できない。本研究では以下に示す方法を用いる。

三角形の2辺を表す次の2つのベクトルを用意する。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

これを用いると、設計空間全体の三角形の面積 S は次式で与えられる。

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{u}_1\|_B^2 \|\mathbf{u}_2\|_B^2 - (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_B^2} \quad (29)$$

また、 \mathcal{D} の面積 $S_{\mathcal{D}}$ は次式である。

$$S_{\mathcal{D}} = \pi r^2 \quad (30)$$

ここで \mathbf{W}^* 平面上の設計可能点の数を n とする。片側積層数 N に対して積層構成は 3^N 通りであるから、次式が成り立つ。

$$n \leq 3^N \quad (31)$$

また、設計可能点は $N^3(N^3 - 1)/2$ 個の格子点の値しか取り得ないから、次式が成り立つ。

$$n \leq \frac{N^3(N^3 - 1)}{2} \quad (32)$$

これより、 n の最大値 n_{max} は次式で与えられる。

$$n_{\text{max}} = \min \left\{ 3^N, \frac{N^3(N^3 - 1)}{2} \right\} \quad (33)$$

これを用いると \mathcal{D} に含まれる設計可能点 (最適候補点) の数の期待値 $\bar{n}_{\mathcal{D}}$ は次式である。

$$\bar{n}_{\mathcal{D}} \leq n_{\text{max}} \frac{S_{\mathcal{D}}}{S} \quad (34)$$

r について解くと

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi} \left(\frac{\bar{n}_{\mathcal{D}}}{n_{\text{max}}} \right)} \quad (35)$$

この式において $\bar{n}_{\mathcal{D}}$ に適切な値を設定することで半径 r の値を決定する。

3.4 最適設計の流れ

1. 目的関数を W_1^*, W_2^* 面上の応答曲面として近似する
 - (a) \mathcal{D} 最適基準に基づく実験計画により W_1^*, W_2^* 平面上に実験点を選択する
 - (b) 実験計画で選択された実験点における目的関数値を解析する
 - (c) 得られたデータから最小二乗法で応答曲面の回帰係数を推定する
2. 得られた応答曲面から最適積層パラメータ \mathbf{W}_{op}^* を求める
3. \mathbf{W}_{op}^* の近接領域の寸法を計算する
4. フラクタル分枝限定法により \mathbf{W}_{op}^* の近接領域に含まれる積層構成の集合を求める
5. 求めた積層構成の集合を応答曲面を用いて総当り的に評価し、最適積層構成を求める

4. 解析結果

4.1 応答曲面の作成 本研究では多段応答曲面法により λ'_{cr} の応答曲面を作成した。多段応答曲面法とは、まず設計空間全体の応答曲面である全体応答曲面 (global response surface, GRS) を作成し、最適点の周りで GRS の精度が不十分であると判定される場合には、最適点周りの小領域からさらに2段目の拡大応答曲面 (zoomed response surface, ZRS) を作成する方法である。応答曲面は参考文献 (12) のものをそのまま用いた。文献 (12) の ZRS の回帰係数から

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50192 \\ 0.21795 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{12}/2 \\ -\beta_{12}/2 & -\beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62208 & -0.147635 \\ -0.147635 & 0.07872 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{tr}(B) &= 0.70080 > 0 \\ \det(B) &= 0.02717 > 0 \end{aligned}$$

より、応答曲面は上に凸な曲面である。よって \mathbf{W}_{op}^* は

$$\mathbf{W}_{\text{op}}^* = -\frac{1}{2} B^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1.31906 \\ -3.85815 \end{bmatrix}$$

と求められる。しかし、上式の \mathbf{W}_{op}^* は設計空間全体の三角形より左下の点である。そこで次式のように \mathbf{W}_{op}^* を辺 $(0, -1) - (-1, 1)$ に正射影した点 $\mathbf{W}_{\text{op}}^{*'}$ を求めた。

$$\mathbf{v}_{45} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_B}$$

$$\mathbf{W}_{\text{op}}^{*'} = \mathbf{v}_{45} + (\mathbf{W}_{\text{op}}^* - \mathbf{v}_{45}, \mathbf{u}'_2)_B \cdot \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -0.221332 \\ -0.557336 \end{bmatrix}$$

Table 3 Optimal stacking sequences

N	stacking sequence	λ'_{cr}	W_1^*	W_2^*
5	[45/-45/90/90/0] _s	1.27137	-0.20000	-0.56800
6	[45/-45/90/45/90/-45] _s	1.27751	-0.20370	-0.59259
7	[45/-45/90/45/90/-45/90] _s	1.27765	-0.23615	-0.52770
8	[45/-45/90/45/-45/90/45/-45] _s	1.27792	-0.21484	-0.57031
9	[45/-45/45/90 ₂ /-45/45/90/-45] _s	1.27797	-0.21811	-0.56379
10	[45/90/-45/(45/-45) ₂ /45/90/-45] _s	1.27798	-0.22400	-0.55200
11	[45/-45/45/90/-45/45/90 ₄ /-45] _s	1.27799	-0.22014	-0.55973
12	[45/-45/45/90/-45/90/45/-45/90/45/-45/90] _s	1.27799	-0.22107	-0.55787
13	[(45/-45) ₂ /90 ₂ /45/-45/90 ₂ /45/-45/90] _s	1.27799	-0.22076	-0.55849
14	[90/(45/-45) ₄ /90/(45/-45) ₂] _s	1.27799	-0.22157	-0.55685
15	[45/-45/90/45/-45/90/(45/-45) ₃ /45/90/-45] _s	1.27799	-0.22133	-0.55733

Table 4 Calculation time

method	time[sec]
Full factorial test	328.897
Fractal-branch and bound	0.074

$N = 15$
PentiumII300MHz

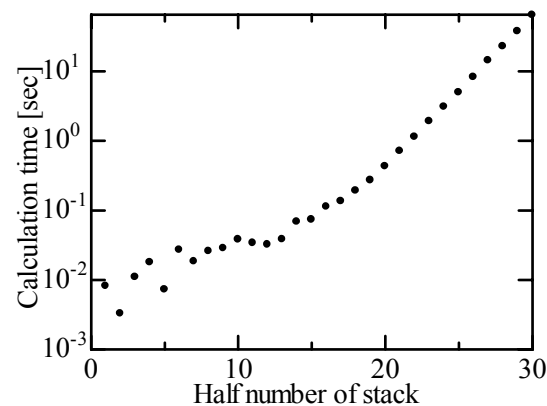


Fig. 10 Calculation time

本研究では近接領域は W_{op}^* の周りに定義した。よって本研究で用いた近接領域は応答曲面の等高線(楕円)に沿った形状をなしていないが、十分な領域を確保することで対応している。計量行列には前頁の B を用い、また特に深い理由はないが $\bar{n}_D = 50$ とした。

4.2 最適積層構成 本手法で求めた片側積層数 $N = 5$ ply から 15ply までの最適積層構成を表 3 に示した。得られた解はすべて総当り探索の結果と一致したため、正確な探索が確認できた。

4.3 計算時間 表 4 に片側積層数 15ply の最適設計に要する計算時間を総当り探索とフラクタル分枝限定法で比較した。表からわかるように大幅な計算コストの軽減が実現されている。図 10 には片側積層数と計算時間の関係を対数グラフにプロットした。図からわかるように計算時間は片側 18ply あたりから直線に乗っている。この直線を最小二乗法で求めたところ計算量は $O(1.60^N)$ と求めた。総当り探索の計算量 $O(3^N)$ と比べて大幅に計算量のオーダーが下がっている。

なお、面外積層パラメータ平面上にフラクタル分枝の三角形を描くソフト (Wviewer) と、フラクタル分枝限定法による積層構成最適設計ソフト (lamdes) は以下の URL から自由にダウンロードできる。

<http://florida.mes.titech.ac.jp/ssoft/soft.html>

5. 結論

以上得られた結果を要約して示す。

- (1) 面外積層パラメータ平面上の設計空間のフラクタル構造を明らかにした

- (2) 決定論的な積層構成最適化手法であるフラクタル分枝限定法を提案し有効性を示した

参考文献

- (1) M. Miki, ASTM STP, 864(1985), 387
- (2) H. Fukunaga, H. Sekine, AIAA J., 30(1992), 2791
- (3) R. Le Riche, R. T. Haftka, AIAA J., 31(1993), 951
- (4) 轟, 渡辺, 小林, 機論, A, 60(1994), 1266
- (5) 福永, 関根, 日本航空宇宙学会誌, 42(1994), 371
- (6) K. Yamazaki, AIAA-96-1539-CP(1996), 1882
- (7) P. N. Harrison, R. Le Riche, R. T. Haftka, AIAA-95-1163-CP(1995), 58
- (8) 座古, ほか 3 名, 材料, 45, 12(1996)1316
- (9) Grangadharan, S. Nagendra, Y. Fiocca, AIAA-97-1236(1996),
- (10) 青木, 福嶋, 邊, 機論, A, 63(1997), 1028
- (11) 太田, 成田, 引地, 第 7 回設計工学, システム部門講演会講演論文集 (1997), 234
- (12) 轟, R. T. Haftka, 機論, 64-621A(1998), 1138-1145
- (13) R. T. Haftka, J. L. Walsh, AIAA J., 30-3(1992), 814
- (14) 笹田, 轟, 三木, 機論, A, 58(1992), 1175
- (15) M. P. Nemeth, AIAA J., 24-11(1986), 1831
- (16) 三木, ほか 3 名, 機械システム入門シリーズ 8 複合材料, 共立出版 (1997), 130
- (17) R. H. Myers and D. C. Montgomery, *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, (1995), John Wiley & Sons. Inc.
- (18) 石畑清, アルゴリズムとデータ構造, (1989), 394, 岩波書店
- (19) 甘利俊一, 金谷健一, 線形代数, (1987), 117, 講談社